



ZBORNİK RADOVA 12. SUSRETA HRVATSKOG DRUŠTVA ZA MEHANIKU

Urednici: Damir Sedlar  
Vedrana Cvitanić  
Mijo Nikolić

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje: Damir Sedlar  
Vedrana Cvitanić  
Kartular d.o.o.

Tisak: Kartular d.o.o.

Naklada: 100 kom.

ISSN 1846-9701



# ZBORNİK RADOVA

## 12. SUSRETA HRVATSKOG DRUŠTVA ZA MEHANIKU

*Split, 21. i 22. rujna 2023. godine*

### Urednici

Damir Sedlar  
Vedrana Cvitanić  
Mijo Nikolić



ISSN 1846-9701



## **ORGANIZACIJSKI ODBOR**

**prof. dr. sc. Damir SEDLAR**, predsjednik Organizacijskog odbora  
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

**prof. dr. sc. Marko ČANADIJA**, predsjednik Društva  
Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

**izv. prof. dr. sc. Ivica SKOZRIT**, dopredsjednik Društva  
Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

**izv. prof. dr. sc. Leo ŠKEC**, tajnik Društva  
Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

**prof. dr. sc. Vedrana CVITANIĆ**, predsjednica Podružnice Društva Split  
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

**prof. dr. sc. Lovre KRSTULOVIC-OPARA**  
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

**izv. prof. dr. sc. Marino BRČIĆ**  
Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

**doc. dr. sc. Mijo NIKOLIĆ**  
Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

## **ORGANIZATOR**

Hrvatsko društvo za mehaniku

Podružnica Split

Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Ruđera Boškovića 32

21 000 Split

## **SJEDIŠTE**

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

Ivana Lučića 5

10 000 Zagreb

## **POKROVITELJI I SPONZORI**

Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

X-Sight s.r.o, Brno, Republika Češka

## **PREDGOVOR**

*Poštovani čitatelji,*

*predstavljamo vam zbornik radova 12. susreta Hrvatskog društva za mehaniku. Susret je održan 21. i 22. rujna 2023. godine na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu u organizaciji podružnice Hrvatskog društva za mehaniku u Splitu.*

*Zbornik sadržava 36 radova koji su prezentirani na skupu. U radovima su predstavljena postignuća iz različitih područja teorijske i primjenjene mehanike. Zastupljeni su radovi posvećeni razvoju i primjeni analitičkih i numeričkih metoda u rješavanju različitih problema kao i radovi temeljeni na eksperimentalnoj analizi. Posebno raduje činjenica da su na velikoj većini radova koautori studenti diplomskih i doktorskih studija te poslijedoktorandi. Također, zastupljeni su i radovi na kojima su koautori stručnjaci iz gospodarstva.*

*Prilikom uređivanja zbornika nije provedena lektura radova te urednici nisu odgovorni za eventualne jezične pogreške.*

*U okviru susreta, s ciljem poticanja uspostavljanja suradnje znanstvenika i stručnjaka iz gospodarstva, održana su izlaganja lokalnih tvrtki na temu rješavanja visokostručnih problema iz područja mehanike kao i predstavljanje tvrtke sponzora.*

*Zahvaljujemo autorima dostavljenih radova i svim sudionicima susreta. S obzirom na tradiciju iznimno uspješnih susreta u organizaciji Hrvatskog društva za mehaniku nadamo se da je i ovaj 12. susret ispunio vaša očekivanja odnosno da se pokazao kao vrlo koristan za vaš znanstveni i stručni rad te kao dobra prilika za razmjenu ideja i uspostavljanje suradnje.*

*Posebna zahvala sponzorima i pokroviteljima na potpori u organizaciji i provedbi susreta: Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje i Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilišta u Splitu te tvrtki X-Sight s.r.o, Brno, Republika Češka.*

*Hvala tajnici Zavoda za strojarstvo i brodogradnju, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, gosp. Mery Burica na pomoći u pripremi ovog zbornika.*

*Organizacijski odbor 12. susreta HDM-a*



## SADRŽAJ

Analiza zamora toplinski obrađenih 3D tiskanih uzoraka od polilaktida	1
Određivanje parametara anizotropnog plastičnog modela temeljenog na pridruženom pravilu tečenja i Yld2000-2d funkciji naprezanja	9
Modeliranje nanorešetki kroz spregu molekularne dinamike, strojnog učenja i konačnih elemenata	15
Diskretni model za prikaz elastičnog kontinuuma	19
Eksperimentalno istraživanje gibajuće mase niz lančanicu	25
Eksperimentalno ispitivanje stupova nadvožnjaka na djelovanje eksplozija	31
Vibracijska analiza 3D mikropolarnog kontinuuma uz primjenu <i>fixed-pole</i> interpolacije	35
O rotacijskim stupnjevima slobode u formulaciji membranskih konačnih elemenata	39
Numerički model raslojavanja ploča	43
Primjena Kempeovih mehanizama u suvremenoj transportnoj tehnici	49
Detekcija inženjerskih parametara ortotropnog mikropolarnog materijala	55
Oslonac ostvaren vijčanim spojem: različite opcije modeliranja metodom konačnih elemenata	61
Primjena kolokacijske metode u numeričkoj analizi 2D područja općeg oblika s različitim rubnim uvjetima	67
Linearna analiza zakrivljenog H-profila s dvije osi simetrije	73
Algoritam metode faznog polja s provjerom konvergencije pojedinog sloja	79
Ispitivanje akustičnih svojstava materijala mjerenjem u impedancijskoj cijevi	85
Raspregnut sustav neklasično prigušenog dinamičkog modela opterećenog silom ovisnom o položaju	87
Analiza i optimizacija geometrije vjetrotunela u svrhu ispitivanja vjetroturbine	91
Dopuna smjernica za oblikovanje nosača mosnih dizalica	99
Ocjena potresne otpornosti kamenih zidanih zgrada statičkom nelinearnom metodom postupnog guranja	105
Stohastička identifikacija parametara u problemima propagacije pukotina	111
Eksperimentalna i numerička ispitivanja sustava za suhu filtraciju zraka	115
Višerazinsko modeliranje procesa rupičenja metodom faznog polja	121
Odjel za mehaničke proračune Tvornice generatora Rade Končar u Zagrebu – I. dio	127
Usporedba algoritama za mapiranje 3D oblaka točaka u 2D parametarski prostor	137
Određivanje parametara Newmark-ove scheme vremenske integracije za nelinearni problem lančanica	143
Slobodne vibracije tanke grede sa točkastom masom djelomično uronjene u vodu	145

Eksperimentalno određivanje zaostalih naprezanja uslijed čepjenja cijevi na cijevnom bloku parogenerators	153
Razvoj rolanih čepova za čepjenje oštećenih cijevi parogenerators u nuklearnim elektranama	159
Karakterizacija i modeliranje raslojavanja lijepljenih spojeva ovisnog o brzini	165
Obogaćeni kontinuum element s ugrađenim jakim diskontinuitetom za prikaz kvazi-krhkog sloma u mezostrukturni	171
Analiza naprezanja dimnocijevnog parnog kotla metodom konačnih elemenata	175
Numerička analiza dinamike grede	183
Numeričko modeliranje iniciranja i rasta oštećenja u zavarenom spoju	189
Modeliranje nestišljive hiperelastičnosti pomoću neuronskih mreža	195
Seizmička analiza povijesnih zidanih tornjeva	201
Indeks autora	207



# Analiza zamora toplinski obrađenih 3D tiskanih uzoraka od polilaktida

Brčić, M.<sup>1</sup>, Brnić, J.<sup>2</sup> i Vrtovšnik, D.<sup>3</sup>

## Sažetak

Izrada topljenjem vlakana (eng. „*Fused Filament Fabrication*“ - FFF), oblik aditivne proizvodnje (eng. „*Additive Manufacturing*“ – AM), posljednjih je godina postala popularna metoda za proizvodnju prototipova i funkcionalnih dijelova. FFF je proces ekstruzije poznat kao 3D ispis, u kojem se predmet izrađuje taloženjem rastaljenog materijala sloj po sloj. Najčešći, odnosno najkorišteniji materijal je polilaktična kiselina (PLA). Iako postoji mnogo istraživačkih radova koji se bave teorijskim i eksperimentalnim određivanjem mehaničkih svojstava i karakteristika, postoji nedostatak istraživačkih radova i znanstvenih radova koji se bave pitanjem svojstava niskocikličnog zamora i S-N krivulja temeljenih na analizi zamora rotirajućim savijanjem tih materijala. Prema nekim znanstvenim radovima, dodatna toplinska obrada plastičnih materijala povećava njihovu tvrdoću, vlačnu čvrstoću i temperaturnu otpornost. Slijedom toga, ovaj se članak bavi niskocikličkim zamorom i zamorom rotirajućim savijanjem za 3D ispisane uzorke izrađene od PLA materijala toplinski obrađenih na različitim temperaturama i pod različitim vrijednostima opterećenja.

**Ključne riječi:** izrada topljenjem vlakana, PLA, zamor rotirajućim savijanjem, niskociklički zamor, polimer, 3D ispis

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. Marino Brčić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: mbracic@riteh.hr

<sup>2</sup> prof. emer. dr. sc. Josip Brnić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: brnic@riteh.hr

<sup>3</sup> Domagoj Vrtovšnik, mag. ing. mech., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: dvrtovsnik@riteh.hr

## 1 Uvod

Prema standardu Američkog društva za ispitivanje i materijale (eng. „*American Society for Testing and Materials*“ - ASTM) F2792-12a [1], tehnologije aditivne proizvodnje (AM) definirane su kao proces u kojem se materijali spajaju kako bi se proizveli predmeti iz 3D modela. Jedna od najpopularnijih AM tehnika je izrada topljenjem vlakana (FFF), poznatija kao 3D ispis, koja je kategorizirana kao proces ekstruzije materijala jer se materijal nanosi kroz mlaznicu ili ekstruder. U pregledu dostupnih znanstvenih radova, članaka i radova izdvaja se jedan materijal koji se najčešće koristi u 3D ispisu ili FFF procesima. Ovaj materijal je polilaktidna kiselina ili polilaktid (PLA). To je jedan od prirodnih termoplastičnih biorazgradivih polimera dobivenih iz obnovljivih izvora [2]. Dakle, PLA je biorazgradivi polimer odobren za razne biomedicinske primjene, a njegova glavna prednost je niska temperatura taljenja. To znači da je za ispis potrebno manje energije, ali to utječe na krtoš materijala [3]. Prema [4], tijekom FFF procesa, materijal prolazi temeljnu faznu transformaciju, koja mijenja geometriju i mehanička svojstva, a dijelovi izrađeni na taj način pokazuju značajnu anizotropiju materijala i heterogenost. Iz tog je razloga vrlo važno razumjeti mehanička svojstva FFF proizvoda i uzoraka, budući da su ona ključna za prilagodbu i upotrebu konačnog proizvoda. Iako postoji značajna količina istraživanja koja se temelje na eksperimentima koji se fokusiraju na vlačnu čvrstoću i elastična svojstva, još uvijek postoji nedostatak referenci o zamoru 3D ispisanih PLA uzoraka, a posebno o zamoru rotacijskim savijanjem 3D ispisanih uzoraka. Ovo je ključno jer je cikličko ispitivanje zamora neophodno za određivanje prikladnosti polimera i 3D ispisanih uzoraka za praktičnu implementaciju i primjenu. Ističe se da su polimerni materijali u eksploataciji često podvrgnuti cikličkom opterećenju, koje je izraženije nego kod metalnih materijala [5]. Zbog navedenog cikličkog opterećenja, odnosno cikličkog zamora, čvrstoća i trajnost polimera se smanjuje ne samo pri visokim razinama napreznja, već i pri nižim razinama napreznja, što u konačnici dovodi do uništenja uzorka i proizvoda.

U radu [6] skupina autora daje S-N krivulje i prilagođeni Woehlerov model za rezultate ispitivanja torzijskog savijanja na PLA uzorcima. Autori ovog rada objavili su članak o rezultatima zamora rotacijskim savijanjem za 3D ispisane uzorke izrađene od različitih polimernih materijala (uključujući PLA) [7]. Rezultati su prikazani za različite brzine vrtnje i dinamička opterećenja na savijanje u obliku pojednostavljenih S-N dijagrama zamora. Ovaj rad predstavlja nastavak prethodno spomenutog istraživanja, fokusirajući se isključivo na PLA uzorke i prošireno na toplinsku obradu ispisanih uzoraka. Prema nekim znanstvenim radovima [8], toplinska obrada plastike povećava njihovu tvrdoću, vlačnu čvrstoću i temperaturnu otpornost. Toplinska obrada ili kaljenje je proces u kojem se uzorak, u ovom slučaju 3D ispisani uzorak, zagrijava na temperaturu između temperature staklenog prijelaza i temperature taljenja i drži na toj temperaturi određeno vrijeme prije nego što se ohladi na sobnu temperaturu. Stoga je zanimljivo proučavati utjecaj toplinske obrade na svojstva zamora 3D ispisanih PLA uzoraka.

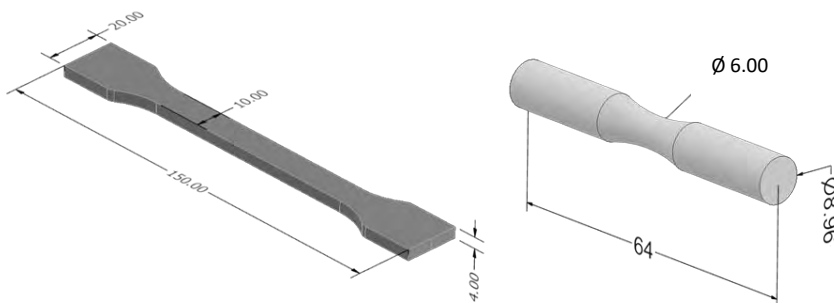
## 2 Materijal i metode

Proizvođač korištenog PLA materijala je Shanghai Fusion Tech Co., Ltd [9], a neke od karakteristika materijala, koje su dostupne od strane proizvođača, dane su u tablici 1.:

Tablica 1. Svojstva korištenog PLA materijala i filamenta [8].

Svojstvo / Materijal	PLA
Gustoća (g/cm <sup>3</sup> pri 21.5 °C; ISO 1183)	1.20
Indeks taljenja (g/10 min)	210 °C/2.16kg = 7 ÷ 11
Temperatura taljenja (°C)	150
Temperatura ostakljivanja (°C)	61

Ispitivanja vlačne čvrstoće i niskocikličnog zamora provedena su na kitalici Shimadzu AGS-X (10kN). Uzorci za vlačni test i zamor pripremljeni su prema ASTM D638, slika 1.



Slika 1. Uzorci za vlačni test i ispitivanje zamora (lijevo) i ispitivanje na zamor rotirajućim savijanjem (desno), s dimenzijama (mm).

Budući da ne postoji poseban standard za ispitivanje zamora polimera, uzorci su pripremljeni za ispitivanje zamora rotirajućim savijanjem kao što je prikazano na slici 1. Parametri ispisa za sva ispitivanja postavljeni su kako slijedi. Gustoća ispune je postavljena na 100%, s dva završna sloja po rubovima uzoraka. Visina uzdužnog sloja postavljena je na 0,2 mm, s mrežnim uzorkom ispune od 0° - 45° - 135°. Temperatura ispisa postavljena je na 205 °C. Temperatura podloge postavljena je na 60°C za PLA uzorke. Potpore ispisu dodane su svakom modelu uzorka ispisa kako bi se izbjeglo skupljanje i savijanje izazvano temperaturom. Brzina ispisa za prvi sloj postavljena je na 15 mm/s, dok je standardna brzina bila 50 mm/s. Uzorci su toplinski obrađeni 30 minuta na sljedećim temperaturama: 40°C, 50°C, 60°C, 80°C i 100°C, a zatim su ohlađeni na sobnu temperaturu.

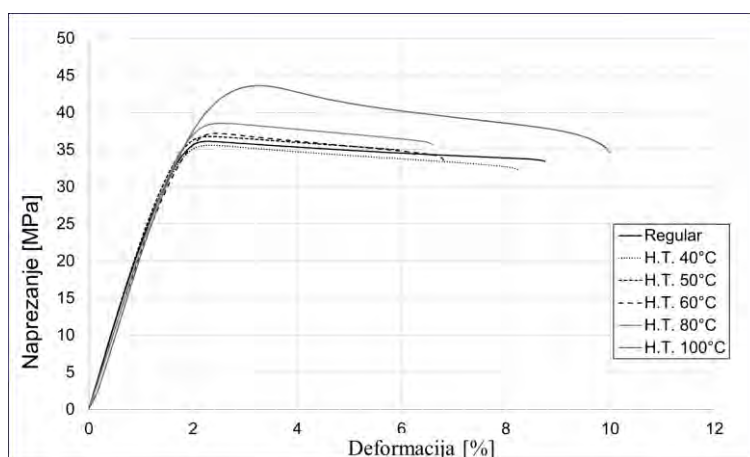
Drugi važan parametar u analizi zamora je hrapavost površine tiskanih uzoraka. Poznato je da izgrebane površine uzrokuju koncentraciju naprezanja i da glatke površine omogućuju bolju raspodjelu naprezanja, smanjujući lomove izazvane zamorom [7]. Prema [10], hrapavost površine 3D ispisanih uzoraka polimera ovisi o dva parametra: visini sloja i promjeru mlaznice. Može se odrediti eksperimentalno ili izračunati pomoću predloženog izraza [10]:

$$R_a = 112,5 \times t \quad (1)$$

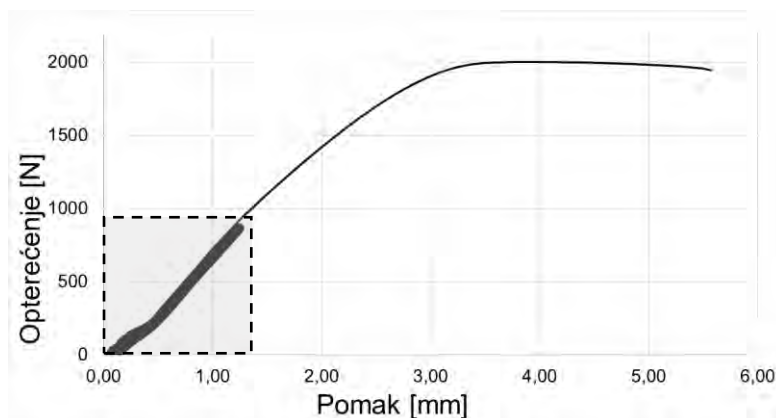
gdje je  $R_a$  hrapavost površine ( $\mu\text{m}$ ), a  $t$  visina sloja (mm). S obzirom na dane podatke o uređaju za 3D ispis korištenom u ovom radu i s promjerom mlaznice od 0,2 mm, hrapavost površine svih

korištenih uzoraka bila je  $R_a = 22,5 \mu\text{m}$ . To odgovara hrapavosti površine koja se nalazi u literaturi [11] za isti PLA materijal.

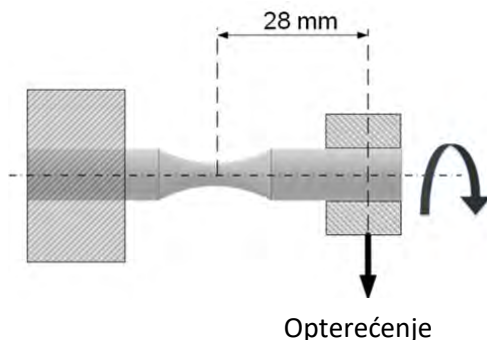
Rezultati vlačnih ispitivanja u obliku dijagrama naprezanje-deformacija prikazani su na slici 2. Ispitivanja niskocikličkog zamora provedena su na sljedeći način. Razmotrena su tri različita postotka opterećenja, i to 50%, 70% i 90% maksimalne vlačne sile, prema rezultatima vlačnog ispitivanja. Vrijednost praga za broj ciklusa postavljena je na 1000 ciklusa pri brzini od 5 mm/min. Ako je uzorak izdržao 1000 ciklusa, ispitivanje je nastavljeno statičkim vlačnim ispitivanjem sve do loma uzorka. Pritom je zabilježena najveća sila i pomak. Naravno, ako uzorak nije izdržao 1000 ciklusa, tj. ako je do loma došlo prije 1000 ciklusa, bilježio se maksimalan broj ciklusa. Takva metoda ispitivanja predložena je u publikaciji [5] i prikladna je kao referentna metoda. Slika 3. prikazuje tipičnu krivulju sila-pomak za ispitivanje niskocikličkog zamora i vlačne čvrstoće.



Slika 2. Dijagrami naprezanje-deformacija za PLA 3D ispisane uzorke, pri različitim temperaturama toplinske obrade.



Slika 3. Karakteristična krivulja opterećenje-pomak za cikličko i vlačno ispitivanje, histereza od 1000 ciklusa u osjenčanom pravokutniku.



Slika 4. Postavke uređaja za zamor rotirajućim savijanjem.

Uređaj za zamor rotirajućim savijanjem steže uzorak kao konzolu, kao što je prikazano na slici 4. Stroj koristi podesivi vlastiti uteg za primjenu vertikalne sile prema dolje na uzorak, koristeći samoporavnajući ležaj u kardanu. Opterećenje na slobodnom kraju stvara vlačno naprezanje na gornjoj polovici uzorka i tlačno naprezanje na donjoj polovici uzorka. Uređaj opetovano opterećuje uzorak tijekom poznatog broja ciklusa s izmjeničnim vlačnim i tlačnim opterećenjima. Točka unutar poprečnog presjeka uzorka, osim točke na neutralnoj osi, kreće se od nultog naprezanja do maksimalnog vlačnog naprezanja i natrag kroz nulto naprezanje i maksimalno tlačno naprezanje. Ovaj raspon odgovara ciklusu s dva obrata, pri čemu obrat predstavlja put od maksimalnog pozitivnog naprezanja do maksimalnog negativnog naprezanja i obrnuto. Stoga je naprezanje koje djeluje na uzorak u odnosu na ciklus opisano sinusoidnom funkcijom.

### 3 Rezultati zamora

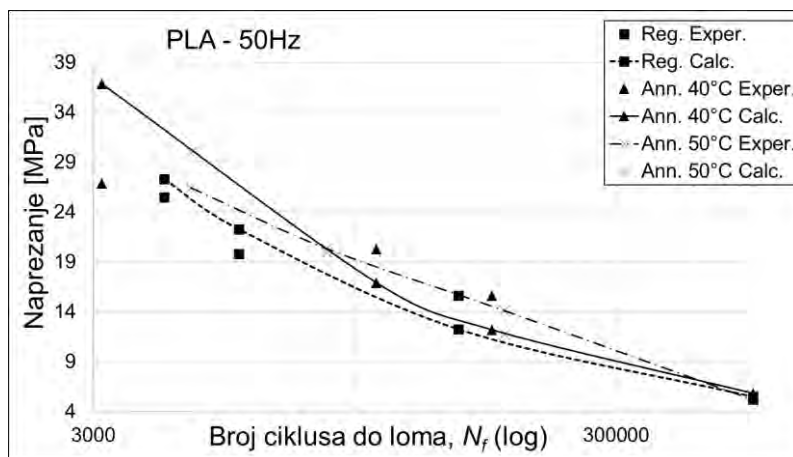
Ispitivanja zamora rotacijskim savijanjem provedena su pri brzini vrtnje od 50 Hz i za toplinski obrađene uzorke pri 40°C i 50°C te za toplinski neobrađene uzorke. Uzorci toplinski obrađeni na temperaturama iznad 50°C pokazuju značajnu dimenzijsku deformaciju i ne mogu se koristiti u rotirajućem stroju za ispitivanje savijanja. Na temelju dobivenih rezultata ispitivanja uspostavljen je model S-N krivulje temeljen na ranom Basquinovom modelu, izraz (2) [6]:

$$\sigma_m = \alpha(N_f)^\beta \quad (2)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  koeficijent i eksponent zamorne čvrstoće, dok  $\sigma_m$  predstavlja vršno naprezanje sa zadanim vijekom trajanja na zamor  $N_f$ . Koeficijenti  $\alpha$  i  $\beta$  za provedena ispitivanja, relevantni za model S-N krivulje prikazan u izrazu (2), dani su u tablici 2., dok su krivulje modelirane istom jednadžbom dane na slici 5. Rezultati ispitivanja niskocikličkog zamora, zajedno sa vlačnim ispitivanjem, provedenim u slučaju da je uzorak izdržao 1000 ciklusa, dani su u tablici 3.

Tablica 2. Izračunate vrijednosti koeficijenata  $\alpha$  i  $\beta$  za brzinu ciklusa od 50 Hz.

Koeficijent / Uzorci	Reg.	H.T. 40°C	H.T. 50°C
$\alpha$	392.9	497.4	607.5
$\beta$	-0.309	-0.322	-0.339



Slika 5. S-N krivulje za dane uzorke.

Tablica 3. Rezultati ispitivanja niskocikličkog zamora, zajedno sa vlačnim ispitivanjem.

Opterećenje %	50%			70%			90%		
	Temp. [°C]	Broj ciklusa	Fmax [N]	Maks. pomak [mm]	Broj ciklusa	Fmax [N]	Maks. pomak [mm]	Broj ciklusa	Fmax [N]
20	1000	1642	2,93	1000	1686	3,03	447	-	-
40	1000	1897	5,89	1000	1908	3,13	523	-	-
50	1000	1713	4,42	1000	1809	2,99	906	-	-
60	1000	1918	5,44	1000	2038	3,55	1000	1456	2,03
80	1000	2030	5,33	1000	2060	4,71	485	-	-
100	1000	2001	5,58	1000	2203	3,59	180	-	-

## 4 Zaključak

Ovaj rad ukratko daje pregled eksperimentalnih rezultata 3D ispisanih PLA ispitnih uzoraka u smislu vlačne čvrstoće i zamora, fokusirajući se na toplinsku obradu, niskociklički zamor i ispitivanja zamora rotirajućim savijanjem. Na temelju rezultata može se potvrditi da toplinska

obrada polimernih materijala i ispisanih uzoraka poboljšuje određena mehanička svojstva. Kao što je prikazano na odgovarajućim slikama i tablicama, toplinski obrađeni uzorci mogu izdržati veća opterećenja prije loma od regularnih, toplinski neobrađenih. U analizi zamora na rotacijsko savijanje, uzorci toplinski obrađeni na temperaturama iznad sobne temperature prežive veći broj ciklusa pri višim razinama naprezanja, dok je pri nižim razinama naprezanja broj ciklusa do loma gotovo isti. U ispitivanjima niskocikličnog vlačnog zamora, uzorci toplinski obrađeni na ili blizu temperature staklenog prijelaza PLA (61 °C) pokazuju bolje rezultate u usporedbi s regularnim uzorcima. Na primjer, samo je uzorak toplinski obrađen na 60 °C izdržao 1000 ciklusa pri 90% maksimalne vlačne sile. Pri 50% i 70% maksimalne vlačne sile, svi su uzorci izdržali propisanih 1000 ciklusa, a maksimalna vlačna sila nakon 1000 ciklusa raste s porastom temperature toplinske obrade. Iako ovo istraživanje daje bolji uvid u ponašanje toplinski obrađenih 3D ispisanih PLA uzoraka na zamor, potrebna su daljnja istraživanja uzoraka FFF polimera i njihove toplinske obrade kako bi se pravilno razumjelo ponašanje FFF proizvoda i njihovo sigurno uvođenje u inženjerske primjene.

### Zahvale

Ovaj rad je u potpunosti podržano – djelomično potpomognuto od strane Sveučilišta u Rijeci u okviru projekata Uniri-tehnic-18-42 i Uniri-tehnic-18-200. Autori se zahvaljuju na svim dobivenim sredstvima.

### Literatura

- [1] ISO/ASTM Additive Manufacturing - General Principles Terminology (ASTM52900) Rapid Manuf. Assoc.; 2013; 10–2.
- [2] Barkhad, M. S., Abu-Jdayil, B., Mourad, A. H. I. i Iqbal, M. Z.; Thermal insulation and mechanical properties of polylactic acid (PLA) at different processing conditions; *Polymers*; 2020; 12; 1–16.
- [3] Tanikella, N. G., Wittbrodt, B. i Pearce, J. M.; Tensile strength of commercial polymer materials for fused filament fabrication 3D printing *Addit. Manuf.*; 2017; 15; 40–7.
- [4] Liu, X. i Shapiro, V.; Homogenization of material properties in additively manufactured structures *CAD Comput. Aided Des.*; 2016; 78; 71–82.
- [5] Müller, M., Šleger, V., Kolář, V., Hromasová, M., Piš, D. i Mishra, R. K.; Low-Cycle Fatigue Behavior of 3D-Printed PLA Reinforced with Natural Filler Polymers; 2022; 14.
- [6] Domingo-Espin, M., Travieso-Rodriguez, J. A., Jerez-Mesa, R. i Lluma-Fuentes, J.; Fatigue performance of ABS specimens obtained by fused filament fabrication *Materials*; 2018; 10.
- [7] Brčić, M., Kršćanski, S. i Brnić, J.; Rotating bending fatigue analysis of printed specimens from assorted polymer materials *Polymers*; 2021; 13.
- [8] Djukanović, M., Damjanović, M., Radunović, L. i Jovanović, M.; Optimisation of PLA Filament Consumption for 3D Printing Using the Annealing Method in Home Environment; *Stroj. Vestnik/Journal Mech. Eng.*; 2022; 68; 185–90.
- [9] Raise3D Premium PLA Technical Data Sheet; 270; 3–5.

- 
- [10] Ibrahim, D., Ding, S. i Sun, S.; Roughness Prediction For FDM Produced Surfaces; 2014; 13–7.
- [11] Alsoufi, M. S. i Elsayed, A. E.; How Surface Roughness Performance of Printed Parts Manufactured by Desktop FDM 3D Printer with PLA+ is Influenced by Measuring Direction Am. J. Mech. Eng.; 2017; 5; 211–22.



# Određivanje parametara anizotropnog plastičnog modela temeljenog na pridruženom pravilu tečenja i Yld2000-2d funkciji naprezanja

Cvitanić, V.<sup>1</sup> i Čorić, I.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu razmatra se anizotropni model plastičnosti za limove koji pretpostavlja pridruženo pravilo tečenja i koristi osam parametarsku Yld2000-2d funkciju naprezanja kao funkciju tečenja/plastični potencijal. Konvencionalnim pristupom parametri anizotropije analiziranog modela određuje se iterativnim postupkom, kao što je Newton-Raphsonova metoda, na temelju četiri vrijednosti naprezanja tečenja i četiri vrijednosti omjera plastičnih deformacija koje se određuju u pokusima jednoosnog odnosno dvoosnog rastezanja uzoraka lima. U ovom radu razmatra se primjena optimizacijskih algoritama, genetskog algoritma i Nelder-Mead metode, u postupku određivanja parametara anizotropije analiziranog modela za lim aluminijske legure AA2090-T3. Razmatranim alternativnim pristupima moguće je uključivanje većeg broja eksperimentalnih podataka kao i određenih ograničenja u postupak kalibracije modela. Tako je u radu u postupku kalibracije uvedeno ograničenje prema kojem su za odabrano stanje smicanja na plohi tečenja prirasti glavnih plastičnih deformacija jednaki po iznosu i suprotnog predznaka. Modeli kalibrirani različitim postupcima analizirani su u predviđanju orijentacijskih ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova koeficijenta.

**Ključne riječi:** parametri anizotropije, pridruženo pravilo tečenja, Yld2000-2d funkcija naprezanja, genetski algoritam, Nelder-Mead metoda, lim AA2090-T3

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Vedrana Cvitanić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, e-mail: vcvit@fesb.hr

<sup>2</sup> **Ivan Čorić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, e-mail: ivan.coric.00@fesb.hr

## 1 Uvod

Za limove je karakteristična kristalografska tekstura koja je prvenstveno posljedica postupaka valjanja prilikom proizvodnje. Tekstura uzrokuje anizotropno ponašanje materijala koje je posebno izraženo u plastičnom području. U opisu ponašanja limova prilikom oblikovanja plastičnom deformacijom najčešće se koriste fenomenološki modeli plastičnosti koji se temelje na pridruženom pravilu tečenja i koriste anizotropnu funkciju naprezanja kao funkciju tečenja odnosno plastični potencijal. U ovom radu razmatra se jedna od najznačajnijih anizotropnih funkcija naprezanja razvijenih za opis ponašanja limova, nekvadratična Yld2000-2d funkcija koja ima osam parametara kojima se opisuje anizotropno ponašanje materijala [1]. Konvencionalnim kalibracijskim postupkom, pod pretpostavkom o pridruženom pravilu tečenja, osam parametara ove funkcije određuje se na temelju četiri vrijednosti naprezanja tečenja i četiri vrijednosti omjera plastičnih deformacija koji se odnose na jednoosna i dvoosna stanja naprezanja. U konačnici postupak računanja parametara svodi se na rješavanje sustava osam nelinearnih jednadžbi nekim od iterativnih postupaka. Za ovako kalibriranu funkciju brojna istraživanja potvrđuju njene dobre mogućnosti u predviđanju ponašanja materijala, posebno u predviđanju orijentacijskih ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova koeficijenta. Međutim, isti rezultati, kao i sama fleksibilnost funkcije, upućuju na zaključak da bi se poboljšanja mogla ostvariti ako bi se u kalibracijskom postupku koristio veći broj eksperimentalnih podataka. U ovom radu, razmatra se primjena optimizacijskih algoritama, genetskog algoritma i Nelder-Mead metode, u postupku računanja parametara anizotropije Yld2000-2d funkcije za lim aluminijske legure AA2090-T3.

## 2 Yld2000-2d funkcija naprezanja

Ortotropna nekvadratična Yld2000-2d funkcija naprezanja [1] je zbroj dviju konveksnih funkcija naprezanja  $\varphi'$  i  $\varphi''$ . Za ravninsko stanje naprezanja Yld2000-2d uvjet tečenja glasi

$$\varphi' + \varphi'' = 2\sigma_T^m \quad (1)$$

gdje je  $\sigma_T$  naprezanje tečenja za referentnu orijentaciju a  $m$  parametar koji se može dovesti u vezu s kristaličnom strukturom materijala. Funkcije  $\varphi'$  i  $\varphi''$  definirane su prema izrazima

$$\varphi' = |\tilde{s}'_1 - \tilde{s}'_2|^m; \quad \varphi'' = |\tilde{s}''_1 + 2\tilde{s}''_2|^m + |2\tilde{s}''_1 + \tilde{s}''_2|^m \quad (2)$$

gdje su  $\tilde{s}'_{1,2}$  i  $\tilde{s}''_{1,2}$  glavna naprezanja linearno transformiranih tenzora naprezanja

$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}'_{xx} \\ \tilde{s}'_{yy} \\ \tilde{s}'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & 0 \\ L'_{21} & L'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \tilde{s}''_{xx} \\ \tilde{s}''_{yy} \\ \tilde{s}''_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L''_{11} & L''_{12} & 0 \\ L''_{21} & L''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L''_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

U izrazu (3)  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  jesu komponente Cauchyevog tenzora naprezanja. Ako se Yld2000-2d uvjet tečenja primjeni u analizi oblikovanja limova plastičnom deformacijom, pri čemu se uobičajeno pretpostavlja ravninsko stanje naprezanja, u izrazu (3) os  $x$  označava originalni pravac

valjanja a os y pravac okomit na pravac valjanja položen u ravnini lima. Komponente matrica transformacija u izrazu (3) definiraju se kao

$$\begin{cases} L'_{11} \\ L'_{12} \\ L'_{21} \\ L'_{22} \\ L'_{66} \end{cases} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_7 \end{cases}; \quad \begin{cases} L''_{11} \\ L''_{12} \\ L''_{21} \\ L''_{22} \\ L''_{66} \end{cases} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_8 \end{cases} \quad (4)$$

gdje su  $\alpha_i, i = 1..8$  parametri koji opisuju anizotropno ponašanje materijala. Ako se pretpostavi pridruženo pravilo tečenja, za limove, ovi parametri mogu se odrediti na temelju eksperimentalnih podataka koji se odnose na naprezanje tečenja ili plastičan tok za jednoosna ili dvoosna stanja naprezanja.

### 3 Primjena različitih algoritama u proračunu parametara anizotropije Yld2000-2d funkcije naprezanja za lim AA2090-T3

U ovom radu koriste se eksperimentalni podaci za lim aluminijske legure AA2090-T3, debljine 1,6 mm [1]. Korištene eksperimentalne vrijednosti omjera naprezanja tečenja  $\sigma_\alpha/\sigma_0$  i Lankfordova koeficijenta  $r$  dobivene u pokusima jednoosnog rastezanja uzoraka lima sedam različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja prikazane su na slici 1., pri čemu je naprezanje tečenja za referentnu orijentaciju  $0^\circ$  jednako  $\sigma_0 = 279,6$  MPa. Također, koriste se i eksperimentalne vrijednosti koje odgovaraju ujednačenom dvoosnom stanju rastezanja: naprezanje tečenja  $\sigma_b = 289,4$  MPa i omjer  $r_b = d\varepsilon_{yy}^p/d\varepsilon_{xx}^p = 0,67$  gdje su  $d\varepsilon_{yy}^p, d\varepsilon_{xx}^p$  prirasti plastičnih deformacija.

Konvencionalnim pristupom osam parametara anizotropije Yld2000-2d funkcije određuje se na temelju osam eksperimentalnih podataka: vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova koeficijenta koje odgovaraju orijentacijama  $0^\circ, 45^\circ$  i  $90^\circ$  ( $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}$ ) te vrijednosti naprezanja tečenja i omjera plastičnih deformacija koje odgovaraju ujednačenom dvoosnom stanju rastezanja ( $\sigma_b, r_b$ ). Ovim pristupom računanje parametara svodi se na rješavanje sustava osam nelinearnih jednadžbi nekim od iterativnih postupaka. U ovom radu u postupku računanja parametara Yld2000-2d funkcije za lim AA2090-T3 primijenjena je Newton-Raphsonova metoda.

Korištenjem optimizacijskih algoritama moguće je uključivanje većeg broja eksperimentalnih podataka kao i određenih ograničenja u postupak kalibracije funkcije. Ovim pristupom, postupak određivanja parametara svodi se na računanje parametara za koje su, za određene fizikalne veličine, odstupanja predviđenih od eksperimentalnih vrijednosti najmanja. U radu je u postupku kalibracije Yld2000-2d funkcije naprezanja za lim AA2090-T3 korišten sljedeći izraz za funkciju pogreške odnosno funkciju odstupanja

$$Error = Error_\sigma + Error_r + w_{r\xi} \left( \frac{\xi^{pred}}{-1} - 1 \right)^2 \quad (5)$$

$$Error_{\sigma} = \sum_{i=1}^7 w_{\sigma i} \left( \frac{\sigma_i^{pred}}{\sigma_i^{exp}} - 1 \right)^2 + w_{\sigma b} \left( \frac{\sigma_b^{pred}}{\sigma_b^{exp}} - 1 \right)^2 \quad (6)$$

$$Error_r = \sum_{j=1}^7 w_{rj} \left( \frac{r_j^{pred}}{r_j^{exp}} - 1 \right)^2 + w_{rb} \left( \frac{r_b^{pred}}{r_b^{exp}} - 1 \right)^2$$

U izrazima (5) i (6) *s pred* odnosno *exp* označene su predviđene odnosno eksperimentalne vrijednosti naprezanja tečenja i omjera plastičnih deformacija, pri čemu se u obzir uzima svih 16 dostupnih eksperimentalnih podataka. U izrazima (5) i (6),  $w_{\sigma i}$ ,  $w_{\sigma b}$ ,  $w_{rj}$ ,  $w_{rb}$  jesu težinski faktori kojima se utječe na udio pojedinačnih odstupanja u iznosu funkcije pogreške. Vrijednosti težinskih faktora koje su korištene u radu navedene su u tablici 1. U izrazu (5), pored članova koji se odnose na odstupanja naprezanja tečenja i omjera plastičnih deformacija, uveden je član koji predstavlja ograničenje koje se odnosi na stanje smicanja na plohi tečenja za koje vrijedi:  $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ . Prema eksperimentalnim i teorijskim razmatranjima prikazanim u radu [2], za stanja smicanja prirasti glavnih plastičnih deformacija  $d\varepsilon_1^p$ ,  $d\varepsilon_2^p$  su jednaki po iznosu i suprotnog su predznaka, tj.  $\xi = d\varepsilon_2^p/d\varepsilon_1^p = -1$ . U radu su parametri anizotropije za lim AA2090-T3 računati za vrijednost težinskog faktora  $w_{r\xi} = 0$  ili  $w_{r\xi} = 1$  odnosno bez ili s uključenim razmatranim ograničenjem.

U tablici 2. prikazane su izračunate vrijednosti parametara. Algoritmi proračuna parametara označeni su kako slijedi: konvencionalni Newton-Raphsonov postupak – NR, genetski algoritam – GA, Nelder-Mead metoda – NM. Svi proračuni su provedeni korištenjem programskog paketa Matlab. Za svaki provedeni postupak proračuna naveden je korišten skup težinskih faktora kao i algoritam kojim je dobiveno korišteno početno rješenje. U nekim slučajevima kao početna rješenja korištena su ona koja su dobivena naznačenim postupkom ali je pojedinim parametrima promijenjen predznak. U postupku proračuna parametara genetskim algoritmom, korištene su sljedeće nestandardne postavke algoritma: raspon u kojem algoritam traži rješenje za pojedini parametar određen je kao rješenje dobiveno Newton-Raphsonovim postupkom  $\pm \Delta$ , gdje je  $\Delta = 2$  ili 10, maksimalan broj generacija jednak je 60000 a veličina populacije iznosi 900. Za obje navedene veličine  $\Delta$  provedeno je po 10 postupaka rješavanja, a kao najbolje rješenje usvojeno je ono za koje je funkcija pogreške definirana izrazima (5) i (6) najmanja. U tablici 2., navedeni su i iznosi funkcije pogreške. Za konvencionalni Newton-Raphsonov postupak iznos funkcije pogreške izračunat je korištenjem izraza (5) i (6) i skupa težinskih faktora Set1. Može se uočiti da su vrijednosti funkcije pogreške značajno manje za Yld2000-2d funkcije čiji parametri su određeni alternativnim postupcima.

Tablica 1. Vrijednosti težinskih faktora korištenih u funkciji pogreške

	$w_{\sigma_{0,45,90,b}}$	$w_{\sigma_{15,30,60,75}}$	$w_{r_{0,45,90,b}}$	$w_{r_{15,30,60,75}}$	$w_{r\xi}$
Set1	1	1	1	1	0
Set1*	1	1	1	1	1
Set100	100	1	100	1	0
Set100*	100	1	100	1	1
Set10s	10	10	1	1	0
Set10s*	10	10	1	1	1

Tablica 2. Parametri anizotropije Yld2000-2d funkcije izračunati različitim algoritmima

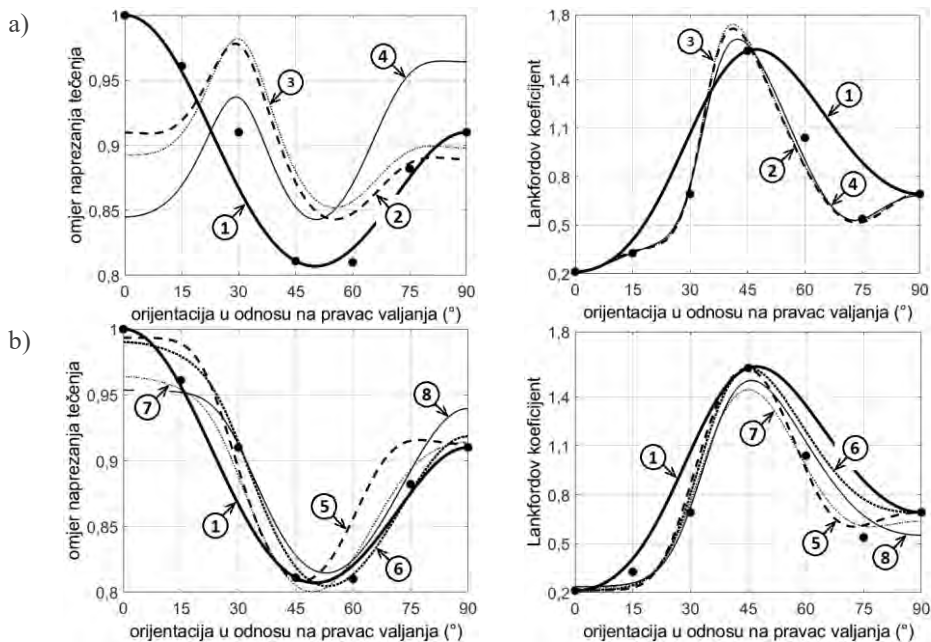
slučaj	1	2	3	4	5	6	7	8
algoritam	NR	GA	NM	NM	NM	NM	NM	NM
odabir $w_i$	-	SET1	SET1	SET1*	SET100	SET100*	SET10s	SET10s*
početno rješenje	izotropno	NR	GA	izotropno ( $-\alpha_1, -\alpha_4$ )	izotropno ( $-\alpha_1$ )	izotropno ( $-\alpha_1$ )	NR ( $-\alpha_1$ )	NR ( $-\alpha_1, -\alpha_3$ )
$\alpha_1$	0,4889	-1,0121	-1,0043	-1,2604	-1,3663	-0,7911	-1,0101	-0,8620
$\alpha_2$	1,3766	2,2056	2,1762	2,0531	1,6105	2,0494	1,7806	2,0822
$\alpha_3$	0,7532	0,7035	0,6298	0,1971	0,2055	-0,5124	0,1804	-0,6625
$\alpha_4$	1,0247	-0,6608	-0,6759	-0,7696	0,9472	0,6771	0,9323	0,5962
$\alpha_5$	1,0362	1,1559	1,1543	1,1799	1,0032	1,0457	1,0301	1,0760
$\alpha_6$	0,9038	1,0797	0,9830	0,8498	0,7207	0,9093	0,7266	0,9109
$\alpha_7$	1,2319	1,1281	1,1180	1,1516	1,2064	1,1762	1,1972	1,1583
$\alpha_8$	1,4863	0,7488	-0,7451	0,8700	1,4323	1,6310	1,5622	1,6180
Error	0,8629	0,0794	0,0783	0,0914	0,1879	0,4678	0,1264	0,2613

## 4 Predviđanja ravninske anizotropije

Yld2000-2d funkcija naprezanja s parametrima prikazanim u tablici 2. razmatrana je u predviđanju orijentacijskih ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova koeficijenta. Brojna razmatranja potvrđuju da se orijentacijska ovisnost Lankfordova koeficijenta može razmatrati kao zrcalna slika orijentacijske ovisnosti visina posudice u pokusu cilindričnog dubokog vučenja lima. Prema eksperimentalnim rezultatima cilindričnog dubokog vučenja za razmatrani lim AA2090-T3 [3], orijentacijska ovisnost Lankfordova koeficijenta trebala bi pokazivati sljedeće značajke tj. ekstreme: najveće vrijednosti za orijentacije 40° i 90° (veća i manja vrijednost) te najmanje vrijednosti za orijentacije 0° i 70° (manja i veća vrijednost).

Na slici 1.a) prikazana su predviđanja dobivena Yld2000-2d funkcijom čiji su parametri određeni Newton-Raphsonovom metodom odnosno optimizacijskim algoritmima uz korištenje skupa težinskih faktora SET1 i SET1\* (bez i s razmatranim ograničenjem). Može se uočiti da konvencionalni kalibracijski postupak rezultira najboljim predviđanjem orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja. S druge strane, optimizacijski algoritmi rezultiraju znatno boljim predviđanjima orijentacijske ovisnosti Lankfordova koeficijenta. Predviđanja Lankfordova koeficijenta dobivena optimizacijskim algoritmima su vrlo slična te su predviđeni ekstremi u skladu s prethodno navedenim razmatranjem vezano uz postupak dubokog vučenja. Funkcija čiji su parametri određeni uz uključeno ograničenje za stanje smicanja (postupak NM-SET1\*) predviđa nešto manji iznos najveće vrijednosti Lankfordova koeficijenta pri orijentaciji 42,5°.

Na slici 1.b) prikazana su predviđanja dobivena Yld2000-2d funkcijom čiji su parametri određeni optimizacijskim algoritmima uz korištenje skupa težinskih faktora SET100 i SET10s odnosno SET100\* i SET10s\* (bez odnosno s razmatranim ograničenjem). Uvođenje većih vrijednosti težinskih faktora u funkciju pogreške za orijentacije 0°, 45° i 90° (SET100) odnosno za članove koji se odnose na naprezanja (SET10s) rezultira poboljšanjima u predviđanju naprezanja tečenja ali i nešto lošijim predviđanjima Lankfordova koeficijenta. Sve prikazane funkcije predviđaju položaj najveće vrijednosti Lankfordova koeficijenta za orijentaciju  $\approx 45^\circ$ . Funkcije čiji su parametri određeni uz uključeno ograničenje za stanje smicanja (NM-SET100\*, NM-SET10s\*) ne predviđaju manji ekstrem za orijentaciju 90°.



Slika 1. Predviđanja orijentacijskih ovisnosti dobivena Yld2000-2d funkcijom. Parametri izračunati korištenjem skupa težinskih faktora: a) SET1; b) SET100 i SET10s

## 5 Zaključak

U ovom radu razmatrani su postupci određivanja parametara anizotropije Yld2000-2d funkcije naprezanja, pod postavkom o pridruženom pravilu tečenja, za lim aluminijske legure AA2090-T3. Uspoređeni su konvencionalni pristup i optimizacijski postupci, genetski algoritam i Nelder-Mead metoda. Primjenom optimizacijskih algoritama dobivena su poboljšanja u predviđanju orijentacijskih ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova koeficijenta. Na temelju dobivenih rezultata može se zaključiti da bi se daljnja poboljšanja u primjeni Yld2000-2d funkcije mogla dobiti uz korištenje postavke o nepridruženom pravilu tečenja.

## Literatura

- [1] Barlat, F., Brem, J. C., Yoon, J. W., Chung, K., Dick, R. E., Lege, D. J., Pourboghrat, F., Choi, S. H. i Chu, E.; Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part I: theory; International Journal of Plasticity; 2003; 19; 1297-1319.
- [2] Abedini, A., Butcher, C., Rahmaan, T. i Worswick, M. J.; Evaluation and calibration of anisotropic yield criteria in shear loading: constraints to eliminate numerical artefacts; International Journal of Solids and Structures; 2018; 151; 118-134.
- [3] Yoon, J. W., Barlat, F., Chung, K., Pourboghrat, F. i Yang, D. Y.; Earing prediction based on asymmetric non-quadratic yield function; International Journal of Plasticity; 2000; 16; 1075-1104.

# Modeliranje nanorešetki kroz spregu molekularne dinamike, strojnog učenja i konačnih elemenata

Čanadija, M.<sup>1</sup>, Košmerl, V.<sup>2</sup> i Zlatić, M.<sup>3</sup>

## Sažetak

Rad predstavlja računalni algoritam za simulaciju mehaničkog ponašanja nanorešetkastih struktura pod statičkim opterećenjem. Nanorešetke su sačinjene od jednostrukih ugljikovih nanocijevi. Razvijena metodologija primjenjiva je za probleme na sobnoj temperaturi. Obzirom na postojanje stohastičkih termičkih vibracija atoma na sobnoj temperaturi, razvoj konstitutivnog modela značajno je složeniji. Da bi se ovaj problem uspješno riješilo, spregnute su metode molekularne dinamike, klasičnih nelinearnih štapnih konačnih elemenata i metode strojnog učenja. Pomoću molekularne dinamike dobiva se skup podataka na kojem je trenirana je neuronska mreža s djelomičnom konveksnosti izlaza prema ulazu, te se potom neuronska mreža povezuje s programskim paketom za analize konačnim elementima Abaqus. Ponašanje razvijenog algoritma provjereno je na više primjera.

**Ključne riječi:** nanorešetke, ugljikove nanocijevi, neuronska mreža s djelomičnom konveksnosti izlaza prema ulazu

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Marko Čanadija**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: marko.canadija@riteh.hr

<sup>2</sup> **Valentina Košmerl, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: vkosmerl@riteh.hr, vkomer2@uic.edu

<sup>3</sup> **Martin Zlatić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: mzlatiac@riteh.hr

## 1 Uvod

Poznato je da ugljikove nanocijevi imaju cijeli niz izuzetnih osobina. U ovom radu od interesa su one mehaničke – vrlo visoki modul elastičnosti, te visoka vlačna čvrstoća [1]. Stoga se kao logično nameće mogućnost manipulacije nanocijevima s ciljem stvaranja nanorešetkastih struktura. Ove pak mogu služiti za izradu nanokonstrukcija ili se pak može stvoriti osnovna struktura novih materijala ciljanih osobina.

No, izrada računalnog algoritma koji vjerno može opisati ponašanje takvih struktura daleko je od jednostavnog. Pritom poseban problem predstavlja mogućnost provođenja simulacija na sobnoj temperaturi. Problem leži u tome što atomi na temperaturi višoj od apsolutne nule stohastički vibriraju. Obzirom da se konstitutivni model štapnih ugljikovih nanocijevi dobiva temeljem jednoosnog vlačnog i tlačnog testa molekularnom dinamikom, krivulje naprezanje-deformacija uključuju efekte ovakvih vibracija. Kako ciljano područje uporabe traženog konstitutivnog modela uključuje uobičajene promjere (do 4 nm), te sve moguće kiralnosti nanocijevi, razvijeni opći model treba eliminirati ove efekte. U suprotnom, aplikacija konstitutivnog modela na konačne modele vodit će problemima s konvergencijom uslijed promjenjivosti tangentskog modula naprezanje-deformacija.

Da bi se postigla gore spomenuta općenitost, koristi se usmjerena neuronska mreža (engl. *Feedforward Neural Network*). Kao što je već pokazano u [2], ove mreže mogu vrlo realno reproducirati rezultate dobivene molekularnom dinamikom. Upravo ova osobina predstavlja uzrok gore opisanog problema. Ovaj se problem može i alternativno definirati. Mehanika kontinuuma definira naprezanje kao prvu derivaciju funkcije slobodne energije po deformaciji. Ova definicija zahtijeva i da je funkcija slobodne energije konveksna funkcija koja monotono raste s porastom deformacije. Matematički se ovo može izraziti kao uvjet da je prva derivacija uvijek pozitivna. Dakle, ako bi se osiguralo da je prva derivacija naprezanja po deformaciji pozitivna, padovi u krivulji naprezanje-deformacija bili bi uklonjeni i osigurao bi se povoljni oblik konstitutivnog modela za povezivanje s konačnim elementima.

Rješenje leži u primjeni neuronske mreže s djelomičnom konveksnošću izlaza prema ulazu. Ukratko, mrežom se modelira energija, dok se treniranje mreže provodi na deriviranoj mreži. Ovime je po prvi put dobiven računalni algoritam koji povezuje molekularnu dinamiku, konačne elemente i neuronske mreže, kojim se pak mogu reproducirati proračuni molekularne dinamike s računalno manje zahtjevnim proračunima konačnim elementima.

## 2 Osnovni elementi računalnog algoritma

Prvi korak u razvoju algoritma predstavlja simulacije jednoosnog vlačnog i tlačnog testa putem molekularne dinamike u programskom paketu LAMMPS. Detaljni opis moguće je pronaći u [1], dok se na ovom mjestu daje samo općeniti opis. Ukratko, analizirano je 818 mogućih konfiguracija jednostrukih ugljikovih nanocijevi, za sva moguće kiralnosti nanocijevi promjera do 4 nm. Omjer duljine i promjera nanocijevi za sve slučajeve iznosi približno 5. Testovi su provedeni s konstantnom brzinom deformacije, a korišteni potencijal je modificirani AIREBO [1]. Kao rezultat dobivaju se krivulje naprezanje-deformacija, te promjer-deformacija. Ovo posljednje ujedno omogućava da se kao mjere koriste stvarno naprezanje i stvarna deformacija. Ovi podaci koriste se kao skup podataka na kojima se vrši treniranje neuronske mreže.



Neuronska mreža je usmjerenog tipa. No, kao što je već rečeno, iako ovakav vid mreže može vrlo vjerno reproducirati krivulje naprezanje-deformacija, prisustvo stohastičkih vibracija na temperaturi od 293 K predstavlja problem. U prvom redu to se odnosi na narušavanje konveksnosti funkcije slobodne energije, a posljedično i nepadajuće i nemonotone krivulje naprezanje-deformacija. Pojednostavljeno govoreći, krivulja naprezanje-deformacija uključuje stalne male padove i poraste. Ne samo što su time prekršeni osnovni principi mehanike kontinuuma, već stalne značajne promjene tangentskog modula krivulje vode nemogućnosti konvergencije nelinearne procedure koja se kasnije koristi za rješavanje.

Da bi se zaobišao ovaj problem, moguće je koristiti neuronsku mrežu s djelomičnom konveksnosti izlaza prema ulazu [3, 4, 5]. Ove mreže su koncipirane tako da je u strukturu mreže ugrađen uvjet da je izlaz konveksna funkcija jednog dijela ili svih ulaznih varijabli. U konkretnom problemu ovo znači da neuronska mreža treba modelirati slobodnu energiju. No, ulazni skup podataka ne sadržava vrijednosti energije, već podatke o naprezanju i deformaciji. Iako bi se temeljem ovih vrijednosti moglo procijeniti i energiju, prikladnije je koristiti automatsko diferenciranje neuronske mreže, te time dobiti mogućnost direktnog treniranja na podacima o naprezanju i deformaciji. Da bi se dobio općeniti konstitutivni model, uz ove varijable koriste se i parametri kiralnosti  $n$  i  $m$ . Stoga se konveksnost naprezanja ne uvjetuje za sve ulazne varijable već samo u odnosu na deformaciju.

Po dobivanju istrenirane neuronske mreže kao konstitutivnog modela, potrebno je povezati istu sa softverom za konačne elemente Abaqus. Veza se ostvaruje putem korisničkog potprograma UMAT koji komunicira s Python programom razvijenim u modulu TensorFlow. Koriste se T3D2 štapni konačni elementi u geometrijski i materijalno nelinearnim uvjetima. Na ovom mjestu valja istaći da ovi konačni elementi prilikom korištenja ovakvih nelinearnosti podrazumijevaju nestlačivo ponašanje materijala. Obzirom da je konstitutivni model koji predstavlja neuronska mreža razvijen za stvarno naprezanje i stvarnu deformaciju, zadržavanje nestlačive formulacije vodilo bi većim ili manjim greškama, ovisno o razini deformacije. Problem je riješen na sljedeći način. Temeljem skupa podataka koji uključuje kiralnosti i deformaciju kao ulazne varijable, promjer kao izlaznu varijablu, istrenirana je mreža identične topologije kao one za naprezanja, no s nešto većim brojem neurona u slojevima. Na taj način ova mreža daje podatak o promjeru pri određenoj deformaciji, koji se pak koristi za skaliranje naprezanja u UMAT potprogramu i time kod izračuna stvarnog naprezanja.

### 3 Zaključak

Rad predstavlja metodologiju kojom se mogu modelirati rešetkaste strukture na nanometarskoj razini na sobnoj temperaturi. Modeliranje se vrši uporabom standardnih nelinearnih štapnih konačnih elemenata, gdje ulogu konstitutivnog modela preuzima neuronska mreža s djelomičnom konveksnosti izlaza prema ulazu. Razvijena metodologija omogućava da su dobiveni rezultati jednaki onima dobivenim molekularnom dinamikom.

Kao ključni element algoritma ističe se neuronska mreža s djelomičnom konveksnosti izlaza prema ulazu kojom se u samu mrežu ugrađuje nekoliko fizikalnih principa, od kojih je najvažnija ona o konveksnosti energije. Upravo ovo posljednje omogućava konvergenciju nelinearnih proračuna konačnim elementima. Naposljetku, ističe se da je model prikladan za jednostruke ugljikove nanocijevi svih kiralnosti promjera do 4 nm, a uz poštivanje uvjeta koji su bili korišteni u jednoosnom testu.

---

## Zahvale

Ovaj je rad financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2019-04-4703 i Sveučilište u Rijeci projektom broj uniri-tehnic-18-37.

## Literatura

- [1] Čanađija, M.; Deep learning framework for carbon nanotubes: mechanical properties and modeling strategies; *Carbon*; 2021; 184; 891-901.
- [2] Košmerl, V., Štajduhar, I. i Čanađija, M.; Predicting stress-strain behavior of carbon nanotubes using neural networks; *Neural Computing and Applications*; 2022; 34(20); 17821-17836.
- [3] Amos, B., Xu, L. i Kolter, J.Z.; Input convex neural networks; *International Conference on Machine Learning*, PMLR; 2017; 146-155.
- [4] Huang, S., He, Z. i Reina, C.; Variational Onsager Neural Networks (VONNs): A thermodynamics-based variational learning strategy for non-equilibrium PDEs; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 2022; 163; 104856.
- [5] Faisal, A., Avery, P. i Farhat. C.; A mechanics-informed artificial neural network approach in data-driven constitutive modeling; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 2022; 123; 2738-2759.

# Diskretni model za prikaz elastičnog kontinuuma

Čarija, J.<sup>1</sup>, Nikolić, M.<sup>2</sup>, Marenic, E.<sup>3</sup> i Jarak, T.<sup>4</sup>

## Sažetak

Diskretne modele karakterizira efikasnost proračuna te se takvi modeli koriste za simulaciju mehanizama sloma u različitim materijalima. Ipak ovakvi modeli imaju nedostataka u prikazivanju lokalnog stanja naprezanja. Lokalno stanje naprezanja u diskretnim modelima može se izračunati i prikazati u čvorovima ili u elementima ćelija (Timoshenkovim gredama) diskretnog elementa. Kako bi se precizno izračunalo stanje naprezanja koristeći ovakav model, potrebno je izračunati tenzor naprezanja unutar čvorova Voronoi ćelije.

U ovome radu prikazan je način dobivanja lokalnih naprezanja za diskretni model kada je Poissonov koeficijent jednak nuli te koristeći metodu fiktivnih naprezanja prikazan je izračun stanja naprezanja za slučajeve kada je Poissonov koeficijent različit od nule.

**Ključne riječi:** diskretni model, lokalno naprezanje, Poissonov koeficijent, metoda fiktivnih sila

---

<sup>1</sup> **dr. sc. Jadran Čarija**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: jcarija@gradst.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Mijo Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: mnikolic@gradst.hr

<sup>3</sup> **doc. dr. sc. Eduard Marenic**, Federalno sveučilište Toulouse Midi-Pyrénées, Institut Clément Ader, Zavod za mehaniku, Espace Clément Ader, 3 Rue Caroline Aigle d'Aigle, 31400 Toulouse, e-mail: marenic@insa-toulouse.fr

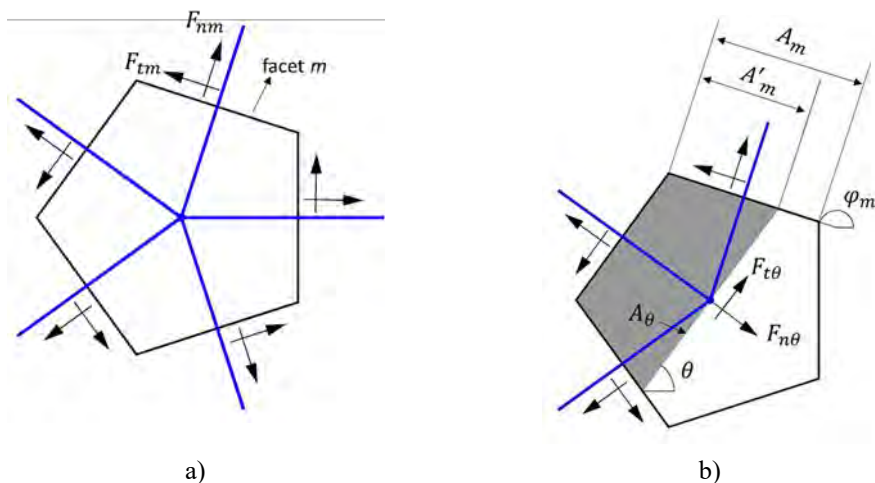
<sup>4</sup> **izv. prof. dr. sc. Tomislav Jarak**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomlslav.jarak@fsb.hr

## 1 Uvod

Diskretne modele karakterizira efikasnost proračuna te se takvi modeli koriste za simulaciju mehanizama sloma u različitim materijalima [1, 2]. Ipak ovakvi modeli imaju nedostataka u prikazivanju lokalnog stanja naprezanja. Da bi se izbjegli postojeći nedostaci i dobili što precizniji rezultati korištene su unaprijeđene metode za izračun stanja naprezanja i deformacija.

## 2 Metodologija

Lokalno stanje naprezanja u diskretnim modelima može se izračunati i prikazati u čvorovima ili u elementima ćelija (Timoshenkovim gredama) diskretnog elementa [3,4]. Kako bi se precizno izračunalo stanje naprezanja koristeći ovakav model, potrebno je izračunati tenzor naprezanja unutar čvorova Voronoi ćelije (slika 1).



Slika 1. Voronoi ćelije s Timoshenkovim gredama: a) Sile u Timoshenkovim gredama, b) Sile na presječnoj ravnini

Sile na proizvoljnoj presječnoj ravnini  $\theta$  određene su tako da se zbroje težinski doprinosi svih sila u gredama koje imaju zajednički čvor:

$$F_{n\theta} = \sum_{m=1}^M R_m [F_{nm} \cos(\pi - \varphi_m + \theta) + F_{tm} \sin(\varphi_m - \theta)] \quad (1)$$

$$F_{t\theta} = \sum_{m=1}^M R_m [F_{nm} \sin(\pi - \varphi_m + \theta) + F_{tm} \cos(\varphi_m - \theta)] \quad (2)$$

te se naprezanje izračuna na sljedeći način:

$$\sigma_{n\theta} = F_{n\theta}/A_{\theta} \quad (3)$$

$$\sigma_{t\theta} = F_{t\theta}/A_{\theta} \quad (4)$$

Kako bi se dobio tenzor naprezanja za pojedini Voronoi čvor, normalna i tangencijalna naprezanja izračunata su za dvije međusobno okomite presječne ravnine.

## 2.1 Metoda fiktivnih sila

Postupak izračuna fiktivnih sila prikazan je u daljnjem tekstu. Nakon što izračunamo glavna naprezanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  za slučaj kada je  $\nu = 0$ , izračunamo i glavne deformacije  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . U sljedećem koraku definiramo fiktivne deformacije koristeći izračunate glavne deformacije:

$$\varepsilon_1^{fic} = \nu \varepsilon_2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_2^{fic} = \nu \varepsilon_1 \quad (6)$$

Množeći lijevu i desnu stranu izraza (5) i (6) s  $E$  (modul elastičnosti), izračunaju se fiktivna naprezanja:

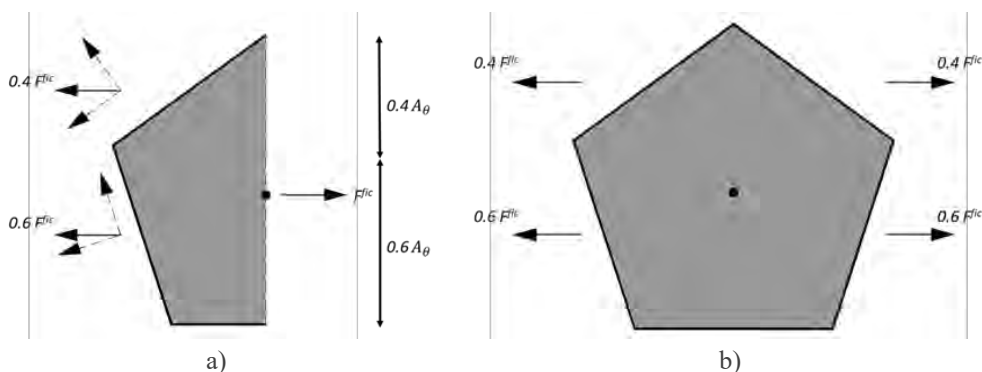
$$\sigma_1^{fic} = \nu \sigma_2 \quad (7)$$

$$\sigma_2^{fic} = \nu \sigma_1 \quad (8)$$

izračunata fiktivna sila u čvoru (slika 3 a)) iznosi:

$$F_1^{fic} = \sigma_1^{fic} A_{\theta,1} \quad (9)$$

gdje je  $A_{\theta,1}$  površina presječne ravnine kroz Voronoi čvor.



Slika 3. Prikaz djelovanja fiktivnih sila: a) fiktivne sile koje djeluju na presječenu ćeliju, b) fiktivne sile koje djeluju na cijelu ćeliju

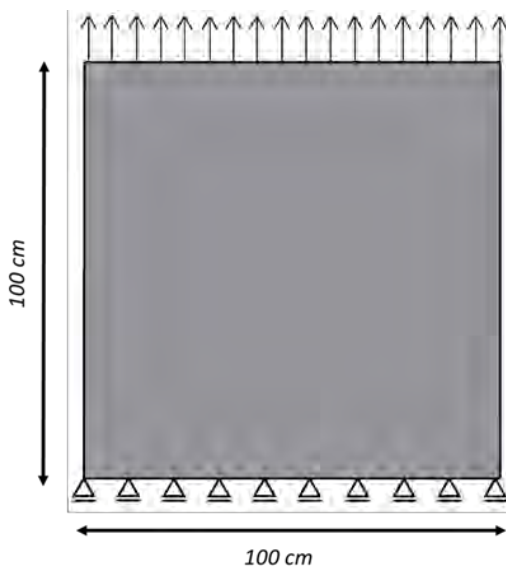
Fiktivna sila je u ravnoteži sa silama koje djeluju na stranice Voronoi ćelije (slika 3. a)). Iznos sile na svaku Voronoi stranicu proporcionalan je projiciranoj površini Voronoi stranice na presječnu ravninu  $A_{\theta,1}$ . Fiktivne sile na svaku Voronoi stranicu projiciraju se unutar Voronoi elementa (Timoshenko greda) u uzdužnom i poprečnom smjeru. Na slici 3. b) vidi se kako su

fiktivne sile u međusobnoj ravnoteži. Nakon što se izračunaju i unesu fiktivne sile u Voronoi elemente, započinje se novi izračun pomaka u čvorovima te pripadnih sila u elementima te potom pripadajućih glavnih naprežanja. Postupak se ponavlja sve dok se glavna naprežanja iz zadnjeg koraka i glavna naprežanja iz prethodnog koraka ne razlikuju za unaprijed određenu toleranciju. Kako bi se izračunale fiktivne sile razvijen je računalni kod unutar Matlaba.

### 3 Rezultati

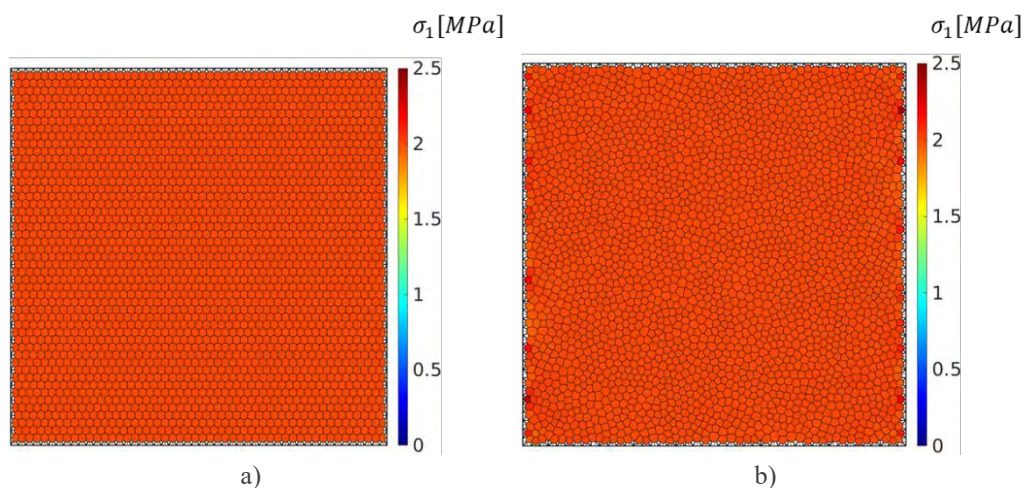
#### Vlačni test

Kako bi se prikazala svojstva diskretnog modela za izračun stanja naprežanja i deformacija kada je  $\nu = 0.2$  napravljeni su vlačni testovi za linearno elastično područje. Koriste se uzorci jednakih geometrijskih i mehaničkih svojstava (slika 4.) diskretizirani s dvije različite mreže (pravilnom i nepravilnom mrežom) te izloženi kontroliranim pomacima.



Slika 4. Vlačni test - geometrija i opterećenje

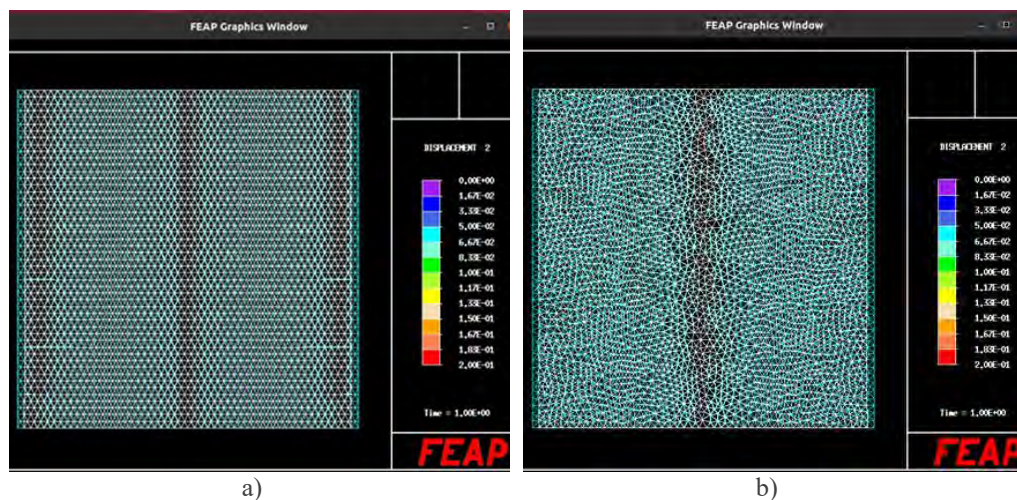
Iznosi glavnih naprežanja  $\sigma_1$  za pravilnu i nepravilnu mrežu prikazani su na slici 5 a) i 6 b).



Slika 5. Vlačni test: a) glavno naprezanje pravilna mreža b) glavno naprezanje nepravilna mreža

Sa slike 5 a) i 5 b) vidi se kako pravilna mreža i nepravilna mreža prikazuje stvarna stanja naprezanja za uzorak izložen vlačnom opterećenju koje iznosi  $2.5 \text{ MPa}$ . Kod nepravilne mreže dolazi do manje razlike u iznosu naprezanja u rubovima u odnosu na naprezanja u jezgri uzorka, ali te razlike iznose maksimalno do  $1.5 \%$ .

Deformacije za pravilnu i nepravilnu mrežu prikazane su na slici 6 a) i 6 b).



Slika 6. Vlačni test: a) deformacija pravilna mreža b) deformacija nepravilna mreža

Može se vidjeti kako se implementiranjem fiktivnih sila mogu pravilno prikazati deformacije kada Poissonov koeficijent iznosi  $0.2$ .

## 4 Zaključak

U ovome radu prikazan je način dobivanja lokalnih napreznja za diskretni model kada je Poissionov koeficijent jednak nuli. Koristeći metodu fiktivnih napreznja prikazan je izračun stanja napreznja za slučajeve kada je Poissionov koeficijent različit od nule. Diskretnim modelom moguće je prikazati realna stanja napreznja i deformacija za različite materijale pomoću unaprijedene metode.

### Zahvale

Istraživanje je financirala Hrvatska zaklada za znanost u sklopu rada na projektu HRZZ-UIP-2020-02-6693 'Metodologija za procjenu parametara u problemima propagacije pukotina nastalih pod utjecajem ekstremnih mehaničkih opterećenja'. Parcijalna financijska potpora dobivena je i projektom Hrvatske vlade i Europske unije iz Operativnog programa kompetitivnosti i kohezije (Projekt KK.01.1.1.02.0027).

### Literatura

- [1] Nikolić, M., Karavelić, E., Ibrahimbegovic, A. i Miscević, P.; Lattice Element Models and Their Peculiarities, Archives of Computational Methods in Engineering, 2018, 25(3), 753-784.
- [2] Čarija, J. Nikolić, M., Ibrahimbegovic, i A, Nikolić, Ž.; Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities, Engineering Fracture Mechanics, 2020, 236, 107211.
- [3] Asahina, D., Ito, K., Houseworth, JE., Birkholzer, JT. i Bolander, JE.; Simulating the Poisson effect in lattice models of elastic continua, Computers and Geotechnics, 2015, 70, 60-67.
- [4] Asahina, D., Aoyagi, K., Kim, K., Birkholzer, JT. i Bolander, JE.; Elastically-homogeneous lattice models of damage in geomaterials, Computers and Geotechnics, 2017, 81, 195-206.



# Eksperimentalno istraživanje gibajuće mase niz lančanicu

Divić, V.<sup>1</sup>, Galić, M.<sup>2</sup>, Grozdanić G.<sup>3</sup>, Galešić Divić, M.<sup>4</sup>, Madunić, A.<sup>5</sup> i Vučković, M.<sup>6</sup>

## Sažetak

Spuštanje niz uže (zipline) predstavlja popularnu adrenalinsku aktivnost na otvorenom. Kako je riječ o vožnji relativno velikom brzinom s minimalnom zaštitom korisnika, sigurnost je izrazito bitna. Standardni i novorazvijeni numerički modeli zahtijevaju setove podataka za verifikaciju. Kao potvrda novorazvijenog numeričkog modela, napravljen je eksperiment unutar kojeg se tijelo s poznatom promjenjivom distribucijom mase spuštalo niz lančanicu. Sustav ima dva moda rada – lančanica s fiksnom duljinom i lančanica s konstantnom silom. Tijelo je opremljeno s baterijom, mikrokontrolerom, memorijom za snimanje podataka, inercijalnim mjernim sustavom i odometrom koji snimaju podatke iz referentnog okvira gibajućeg tijela. Paralelno s tim mjerenjem, videokamerom snimana je pozicija tijela u gibanju niz lančanicu te stanje lančanice. U sustavu s konstantnom silom, mjereno je produljenje lančanice, a u sustavu s konstantnom duljinom lančanice, mjerena je sila na jednom rubu. Izvršeno je više realizacija eksperimenta kako bi se reducirao efekt nekontroliranih veličina. Za svaki od sustava napravljeno je više eksperimenata s varijacijom parametara. Statističkom analizom prikupljenih podataka, dobiven je kompletan set podataka za validaciju numeričkog modela ponašanja gibanja tijela niz lančanicu.

**Ključne riječi:** lančanica, laboratorijski eksperiment, gibanje tijela niz lančanicu

---

<sup>1</sup> **izv. prof. dr. sc. Vladimir Divić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: vdivic@gradst.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Mirela Galić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: mirela.galic@gradst.hr

<sup>3</sup> **Grozdanić Gabrijela, mag. ing. aedif.** Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: gabrijela.grozdanic@gradst.hr

<sup>4</sup> **doc. dr. sc. Morena Galešić Divić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: morena.galesic@gradst.hr

<sup>5</sup> **Madunić Ana**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: ana.madunic97@gmail.com

<sup>6</sup> **Vučković Matej**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: vuckovicmatej@gmail.com

## 1 Uvod

Zipline predstavlja sustav koji se sastoji od dva krajnja oslonca smještena na različitim visinama te zategnutim čeličnim užetom među njima. Na prvom osloncu, teret (korisnik) se pričvršćuje na uže preko sustava koloture. Zbog vlastite težine i razlike u visinama oslonaca, teret se pokreće i kreće sigurnom brzinom prema drugom osloncu. Originalno, ovakvi sustavi su služili za svladavanje prepreka i podizanje/spuštanje tereta na različitim visinama. Danas su postali popularna adrenalinska aktivnost za zabavu.

Na osloncima se prenose horizontalne i vertikalne sile uslijed vlastite težine lančаницe i djelovanja na nju. Tipični sustavi za pridržajne lančаницe uključuju obostrano pridržavano uže i jednostrano pridržavano uže s kontrautezima. Obostrano pridržavano uže je jednostavniji sustav koji je povoljan kod manjih raspona. Uže s kontrautegom je složeniji sustav, ali otporniji na promjene temperature koje utječu na geometriju.

Prethodna istraživanja uključuju različite pristupe u analizi gibanja tijela niz lančanicu. Primjerice, u radu [1] gibanje tijela niz lančanicu se svodi na iterativni postupak proračuna progiba od mase koja se polako giba niz lančanicu koristeći analitičke formulacije [1].

U radu [2] opisani su parametri, način izrade računalnog modela te određivanje kinematičkih parametara kojima se simulira kretanje osobe na ziplineu. U istom radu su prikazane simulacije utjecaja otpora kotrljanja, otpora zraka, inercijskih sila i mase i pozicije korisnika.

U radu [3] analizira se gibanje po kabelu tijela određene mase pričvršćen za njihalo. Masa tijela na njihalu i sajla razmatraju se kao jedinstveni model, opisan diferencijalnim algebarskim jednadžbama. Razvijeni model je robustan za različite nosače, svojstva kabela, duljinu njihala i kočione sile. Također se naglašava problem centra mase koji je pomaknut od osi kabla, međutim tijelo se može smatrati krutim pa se tako spojeni sastav može modelirati kao objedinjena cjelina mase na njihalu koja klizi duž užeta.

Eksperimentalna istraživanja u ovom području su rijetka i obično se u dostupnoj literaturi spominju kao verifikacijske studije. U radu [4] korišteni su takvi verifikacijski skupovi podataka.

Kombinacija optičkog sustava i inercijalnog mjernog sustava (IMU) za praćenje gibajućih objekata je česta. U radu [5] opisan je sustav s fizički odvojenim IMU od kamere, dok se u radu [6] oba sustava nalaze u istom gibajućem tijelu.

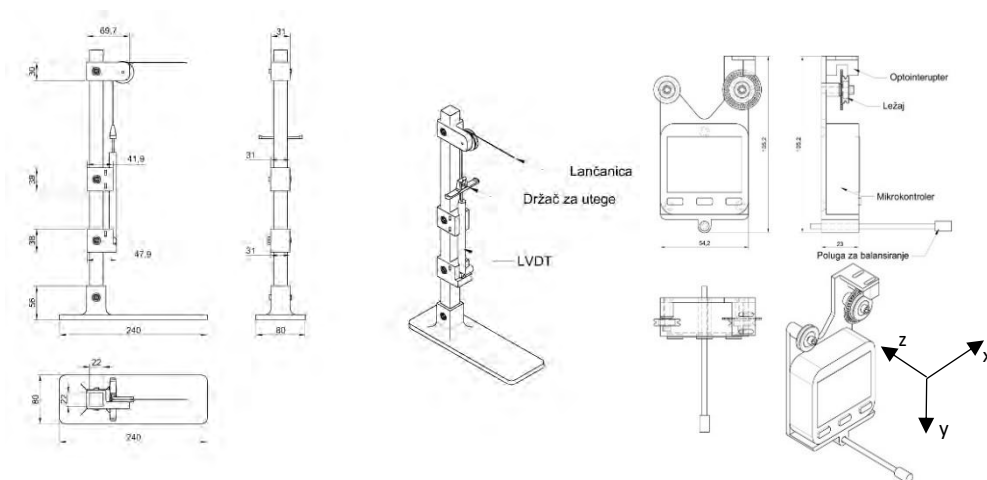
U ovom radu primijenjen je sustav s odvojenim IMU od kamere, ali u budućim istraživanjima planiraju se mjerenja na stvarnim zipline sustavima gdje drugi pristup ima više prednosti. Integracija IMU sustava i odoimetra provedena je na ispitivanjima podzemnih cjevovoda, opisanih u radu [7] te je sličan pristup korišten u ovom radu.

## 2 Metodologija ispitivanja

Eksperiment je postavljen u Laboratoriju za konstrukcije, Fakulteta građevinarstva arhitekture i geodezije u Splitu. Cilj ovoga istraživanja je definirati okvir za provođenje većeg broj mjerenja u različitim scenarijima opterećenja, geometrije i rubnih uvjeta koji bi imali visoku ponovljivost. Maksimalni raspon koji je moguće koristiti je 10m i maksimalna razlika visine oslonaca 3m. Za realizacije prikazane u ovom radu korišten je raspon od 3.9 m između oslonaca te je desni rub lančаницe 0.114 m niži od lijevog.

Korištena je lančаницa od čelične legure s plastičnim tankim premazom promjera 0.5 mm. Lijeva strana lančаницe zgloбно je pričvršćena na mjernu ćeliju za mjerenje reakcije lančаницe. Desna strana lančаницe sastoji se od više dijelova prikazanih na Slici 1. Ovisno o odabranoj

konfiguraciji, desna strana se može definirati da radi u režimu konstantne sile ili konstantne duljine lančanice. U režimu konstantne sile utezi se postavljaju na držač te se sila preko koloture prenosi u lančanicu. Takav režim može uzrokovati elongaciju lančanice, pa se ista mjeri na LVDT senzoru postavljenom ispod utega. Neposredno ispod koloture nalazi se sustav za daljinsko otpuštanje klizača, koji osigurava što manje interferencije operatera eksperimenta i time ponovljivost rezultata. U režimu konstantne sile, senzor pomaka je deaktiviran, a lančаница se omata oko koloture u petlju. Duljina lančanice se mjeri nakon fiksiranja.



Slika 1. Shema oslonca i klizača (koordinatni sustav prikazan na skici odgovara koordinatnom sustavu IMUa)

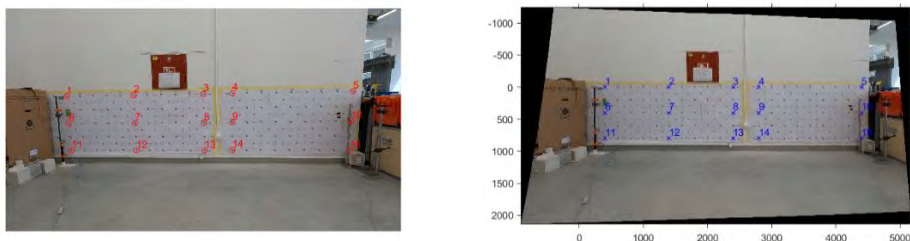
Korištena mjerna oprema se može podijeliti u tri bloka. Oprema za računalni vid sastoji se od kalibracijske plohe, kamere (GOpro hero 10), softverskog paketa Matlab i računala za obradu podataka.

Oprema za mjerenje stanja lančanice (sile i produljenja) se prikuplja preko sustava HBM Quantum MX840B, LVDT senzora pomaka (100 mm, 200 mm ili 500 mm ovisno o rasponima) te savojne mjerne ćelije kapaciteta 50 N. Podaci su prikupljeni frekvencijom od 300 Hz.

Klizač prikuplja podatke iz referentnog okvira korisnika zipline-a. Orijentacije senzora su dane na Slici 1. Os x je u smjeru gibanja, os z je okomita na ravninu lančanice. Klizač je opremljen inercijalnim mjernim sustavom (IMU), odometrom, mikrokontrolerom te pratećim elementima mikrokontrolera. IMU sustav je sastavljen od MPU 6886, koji u sebi sadrži troosni akcelerometar i žiroskop, i troosnog magnetometra BMM150. Podaci su prikupljeni frekvencijom od 100 Hz.

Klizač je zamišljen da se može primijeniti na stvarnim zipline-ovima velikih raspona uz modifikaciju kućišta te dodatak GPS senzora, senzora atmosferskog tlaka i optičkog sustava za mjerenje brzine gibanja.

Videozapisi obrađeni su u softverskom paketu Matlab. Video je sniman u 4K rezoluciji, sa 100 slika u sekundi. Koristeći plohu iza zipline-a s označenom pravokutnom mrežom, mapirane su zakrivljene slikovne koordinate sa stvarnim koordinatama, kao što je prikazano na Slici 2. Os x odgovara horizontalnom pomaku, os y vertikalnom pomaku.



Slika 2. Fotografija ispitnog polja prije i poslije ispravljanja slike

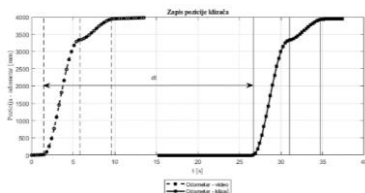
Segmentiranje scene klizača i pozadine napravljeno je na osnovi boja. Tijelo klizača je 3D printano u boji koja se ne pojavljuje u sceni. Kako se iz okvira u okvir videozapisa mijenja osvjetljenje, definiran je raspon boja koje predstavljaju klizača. Radi jednostavnosti odabira raspona boja, pikseli videzapisa su prevedeni u HSV prostor boja. Kada su definirani pikseli koji pripadaju klizaču u svakom trenutku, izračunato je težište piksela. Nadalje, transformacijom slike u prostor stvarnih koordinata, težište objekta predstavlja poziciju u stvarnim koordinatama.

Podaci s klizača obrađeni su na način da su podaci s IMU i magnetometra uvedeni u Kalman filter pomoću kojeg se dobije orijentacija klizača u prostoru. Kada je definirana orijentacija senzora, može se razdvojiti akceleracija koja je posljedica gravitacije i akceleracija koja je posljedica gibanja klizača. Nadalje, podaci akcelerometra se filtriraju nisko propusnim filterom kako bi se odstranio šum senzora.

Podaci s odoimetra daju položaj duž lančanice u vremenu. Derivacijom podataka s odoimetra dobiva se skalarna brzina gibanja. Ovako dobivena brzina zahtjeva filtraciju signala jer postoji šum uslijed derivacije zapisa pomaka.

Welch-ovom metodom dobivena je procjena spektra snage gibanja senzora. Spektar u smjeru osi z odgovara njihanju okomito na ravninu lančanice, dok spektar u smjeru osi y odgovara titranju lančanice.

Podaci optičkog sustava i IMU sinkronizirani su preko kumulativne sume pomaka iz optičkog sustava i odoimetra. Usporedbom tri karakteristične točke (početak gibanja, točka najvećeg doseg u x smjeru i točka kada se zaustavi klizač) za oba seta podataka izračuna se odmak jednog seta od drugog te odnos brzine setova. U svim realizacijama, setovi oba sustava su bili unutar 0.0001 razlike.

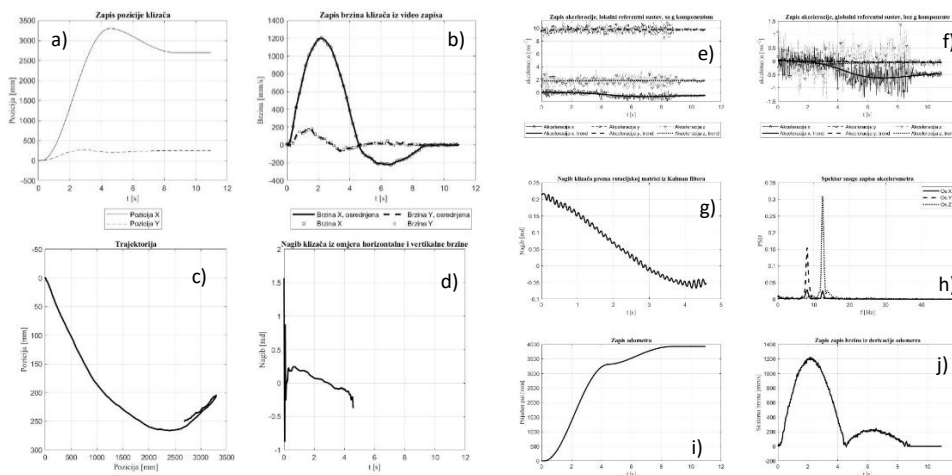


Slika 3. Sinkronizacija podataka

Podaci optičkog sustava i sustava stanja lančanice su sinkronizirani vanjskim okidačem vezanim uz sustav otpuštanja klizača. Različite realizacije su sinkronizirane pomoću kros-korelacijske funkcije pomaka videozapisa.

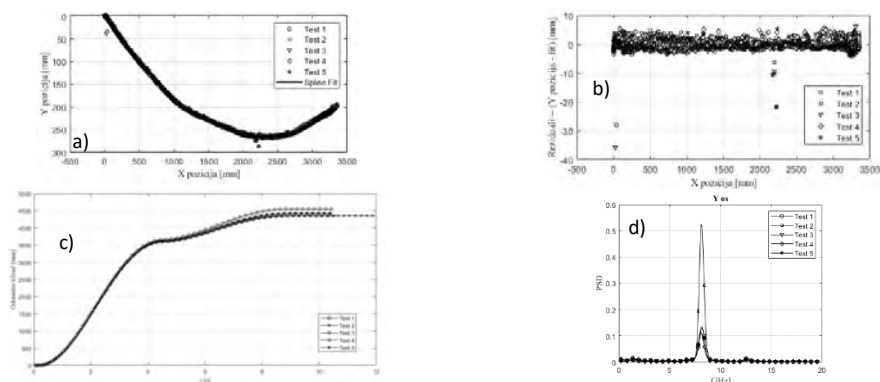
### 3 Prikaz i analiza dobivenih rezultata

Za jednu realizaciju eksperimenta, dobivene su vremenske serija podataka. Nakon postupka sinkronizacije opisane u poglavlju prije, za svaku realizaciju su generirani setovi podataka (primjer realizacije prikazan na Slici 4.).



Slika 4. Rezultati jedne realizacije – a) zapis pozicije klizača, b) zapis brzine c) trajektorija klizača, d) nagib tangente klizača e) zapis akceleracije s IMU sustava, f) zapis akceleracije bez gravitacije, g) nagib klizača h) spektri akceleracija, i) zapis odometra, j) brzina gibanja

Iz skupa realizacija s istim podacima, generiraju se setovi za usporedbu s numeričkim proračunima. Prosječna linija trajektorije i gibanja po svakoj osi dobivena je prilagodbom kubične spline funkcije. Kao ocjena prosječne točnosti, uzeto je odstupanje podataka od prosječne funkcije.



Slika 5. Preklap setova podataka pet realizacija istih postavki (a) trajektorije, odstupanje od prosječne trajektorije (b), odometar s klizača (c), spektar akceleracija klizača okomito na lančanicu (d)

Za set prikazan na Slici 5., standardna devijacija pojedinačnih trajektorija iznosila je 2.14 mm. Osrednjavanje se provelo i na podacima s klizača. Na panelu c), Slike 5., dano je podudaranje podataka s odometra IMU sustava. Standardna devijacija odometra iznosi 78.54 mm. Dinamičke karakteristike lančanice su prikazane spektrima dobivenim s akcelerometara klizača koji su prikazani na panelu d) Slike 5. Sa standardnom devijacijom od 0.054 Hz, frekvencije titranja osnovnog moda klizača su vrlo blizu što upućuje na sličnost ponašanja sustava u dinamičkom pogledu.

## 4 Zaključak

U radu su dane smjernice za provođenje eksperimentalnog istraživanja gibanja niz lančanicu. Ovako dobiveni setovi podataka mogu biti korišteni samostalno, koristeći modelsku sličnost sa stvarnim konstrukcijama, ili kao verifikacijski set podataka za numeričke modele.

Posebna pažnja u eksperimentima je posvećena sinkronizaciji podataka i redukciji utjecaja nekontroliranih veličina. Usporedbom pojedinih realizacija, uočava se malo osipanje podataka u odnosu na srednju vrijednost (0.8 % od maksimalne vrijednosti trajektorije, 1.8 % od maksimalne vrijednosti odometra) te da ovako generirani podaci imaju visoku pouzdanost.

## Zahvale

Prikazana istraživanja su djelomično podržana projektom KK.01.1.1.02.0027 - projekt sufinanciran iz Državnog proračuna Republike Hrvatske i od strane Europske unije iz Europskog fonda za regionalni razvoj unutar Operativnog programa "Konkurentnost i kohezija".

## Literatura

- [1] Mungan, E. C.; Lipscombe, C.T.; Traveling along a zipline; Physics Department, U.S. Naval Academy, Annapolis, Maryland.
- [2] Jojić, T., Vladić J. i Đokić, R.; Anchorage type and tension rope force impact on zipline's kinematic characteristics; Machine design; 2019; 11; 4; 149-154; 149-150.
- [3] Kožar I. i Malić Torić N.; Analysis of body sliding along cable, Department for Computer Modeling, Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka.
- [4] Jojić, T., Vladoić, J. i Đokić, R.; Zipline mathematical model forming, experimental verification and analysis of influential parameters. Archive of Applied Mechanics; 2023; 1-24.
- [5] Wenchao Jiang, Zhaozheng Yin; Combining passive visual cameras and active IMU sensors for persistent pedestrian tracking; Journal of Visual Communication and Image Representation; 2017; 48; 419-431.
- [6] Jung, S., Cho, Y., Kim, D. i Chang, M.; Moving Object Detection from Moving Camera Image Sequences Using an Inertial Measurement Unit Sensor; Applied Sciences; 2019..
- [7] Abdel-Hafez, M. i Chowdhury, S. Pipeline inspection gauge (pig) position estimation using imu, odometer and a set of reference stations; 2015; ASCE-ASME J. Risk and Uncert. in Engrg. Sys., Part B: Mech. Engrg.. 2. 10.1115/1.4030945.

# Eksperimentalno ispitivanje stupova nadvožnjaka na djelovanje eksplozija

Draganić, H.<sup>1</sup>, Lukić, S.<sup>2</sup>, Jeleč, M.<sup>3</sup>, Gazić, G.<sup>4</sup> i Radić, I.<sup>5</sup>

## Sažetak

U radu je prikazano eksperimentalno ispitivanje stupova nadvožnjaka na djelovanje eksplozija. Ispitivanja su provedena na umanjenim modelima stupova pri čemu su mjereni parametri eksplozije i oštećenja stupova. Na osnovu provedenog ispitivanja može se zaključiti da je moguće s dostatnom pouzdanošću predvidjeti potrebne količine eksploziva prema odabranom scenariju za ciljane razinu oštećenja konstrukcijskih elemenata.

**Ključne riječi:** stup nadvožnjaka, poligonsko ispitivanje, eksplozivni naboj, oštećenje

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. **Draganić Hrvoje**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za materijale i konstrukcije, Ulica Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: draganic@gfos.hr

<sup>2</sup> dr. sc. **Sanja Lukić**, Respect-ing d.o.o. Sveučilište, Ilirska ulica 27, 31000 Osijek, e-mail: lukic.sanja1707@gmail.com

<sup>3</sup> doc. dr. sc. **Mario Jeleč**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za materijale i konstrukcije, Ulica Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: mjelec@gfos.hr

<sup>4</sup> izv. prof. dr. sc. **Goran Gazić**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: ggazic@gfos.hr

<sup>5</sup> izv. prof. dr. sc. **Ivan Radić**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za materijale i konstrukcije, Ulica Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: radic@gfos.hr

## 1 Uvod

Velika rasprostranjenost armiranobetonskih (AB) konstrukcija u svijetu posljedica je povoljnog omjera njihove cijene i kvalitete. Razumljivo je stoga da je AB najčešće korišteni materijal i za izradu mostova. Unatoč njihovoj učestalosti, u literaturi je moguće pronaći relativno malo ispitivanja AB stupova mostova na djelovanje eksplozija [1,2]. Takva djelovanja mogu biti posljedica terorističkih akcija pri čemu prometna infrastruktura može biti posebno podložna radi značajnih ekonomskih i društvenih posljedica. Zbog složenosti izvedbe i visokih troškova, ispitivanja stupova mostova na djelovanje eksplozija se ne provode na prototipovima stvarnih izmjera. Provođenje eksperimentalnih ispitivanja utjecaja eksplozija na konstrukcije općenito je vrlo zahtjevan i zamršen zadatak. Čimbenici koji utječu na složenost analize uključuju visoke troškove provedbe ispitivanja, potrebu za stručnjacima za rukovanje eksplozivima i ograničenu dostupnost prikladnih poligona za detoniranje većih količina eksplozivnih naboja. Nadalje, korištenje različitih tipova eksploziva različitog kemijskog sastava, različite količine eksploziva ovisno o scenariju napada, različitih oblika naboja i različitih položaja u odnosu na konstrukciju ili element također mogu postupak analize učiniti složenijim [1,2].

U radu je prikazano eksperimentalno ispitivanje AB stupova nadvožnjaka na djelovanje eksplozija. Prema pretpostavljenom scenariju i unaprijed definiranim količinama eksploziva, ispitivanjem su mjereni parametri eksplozije te oštećenja nastala na stupovima.

## 2 Geometrija i scenarij ispitivanja

Odabrani AB stup nadvožnjaka po kojem je izrađivan model za ispitivanje dio je postojeće lokalne cestovne mreže (Slika 1) i projektiran je korištenjem starih propisa prije europskih normi. Između nekoliko postojećih tipova stupova, odabrana je geometrija nepravilnog poprečnog presjeka (Slika 1) zbog njezine učestalosti pojavljivanja i najveće izloženosti tlakovima eksplozije utvrđene ranijim numeričkim simulacijama.



Slika 1. Odabrani stup nadvožnjaka (lijevo) i izvedeni eksperimentalni stupovi (desno)

Eksperimentalni model stupa izgrađen je u umanjenom mjerilu 1:3 (visine 2,0 m) zbog prevelikih stvarnih dimenzija stupa i prevelike količine eksploziva koja bi bila potrebna u tom slučaju (Slika 1). Karakteristike ugrađenih materijala nisu umanjene u odnosu na stvarni stup



zbog prevelike složenosti takvih radova. Stupovi su izvedeni od betona razreda čvrstoće C25/30 i armirani glatkom uzdužnom (S275) i poprečnom (S235) armaturom. Ranije je utvrđeno da ugrađeni materijali najbolje odgovaraju materijalima postojećih stupova, odnosno marki betona MB-300 i glatkom čeliku č0.200. Geometrija i armiranje stupova izvedeno je u potpunosti prema nacrtima stvarnih postojećih stupova.

Zbog složenosti i različitih parametara koje treba uzeti u obzir pri analizi učinka eksplozije na konstrukciju, odabran je jedan od kritičnijih i najčešćih scenarija napada eksplozivom smještenim u prtljažniku vozila koje se nalazi ispod nadvožnjaka u blizini stupa. Na taj način je definiran vertikalni i horizontalni položaj eksploziva u odnosu na stup. Procjena potrebne količine eksploziva te odgovora konstrukcije napravljena je preko tlak-impuls (T-I) krivulja preko kojih se povezuje opterećenje od eksplozije s ciljanom razinom oštećenja. Eksperimentalnim ispitivanjem cilj je ostvariti 4 teorijske razine oštećenja stupa (Tablica 1) za koje je prethodno, uzimajući u obzir odabranu nepromjenjivu udaljenost eksploziva ( $R$ ), određena potrebna količina eksploziva ( $W$ ). Hrvatska vojska je bila zadužena za nabavu i rukovanje eksplozivnim materijalom. U eksperimentu je korišten plastični eksploziv oblikovan u kuglu, označen kao PEP500 s koeficijentom TNT ekvivalencije 1,3. Popis ispitanih stupova s količinama eksploziva dan je u tablici 1. Eksperimentalno ispitivanje eksplozivom može se teorijski svrstati u četiri područja djelovanja prema skaliranoj udaljenosti  $Z = R/W^{1/3}$ , daleko (engl. far-field)  $Z > 1 \text{ m/kg}^{1/3}$ , srednje (engl. intermediate)  $0,4 \text{ m/kg}^{1/3} < Z < 1 \text{ m/kg}^{1/3}$ , blizu (engl. near-field)  $0,4 \text{ m/kg}^{1/3} < Z$  i kontaktno (engl. contact)  $Z = 0 \text{ m/kg}^{1/3}$ . Sukladno proračunatoj vrijednosti  $Z$ , sve detonacije pripadaju bliskom području djelovanja ( $N$ ).

Tablica 1. Scenarij ispitivanja djelovanja eksplozija na stupove

Uzorak	Skalirana udaljenost $Z [\text{m/kg}^{1/3}]$	Područje eksplozije	Ciljano oštećenje stupa
1	0,372	Blizu (N)	Površinsko
2	0,338	Blizu (N)	Umjereno
3	0,314	Blizu (N)	Teško
4	0,290	Blizu (N)	Opasno

### 3 Postavke i rezultati ispitivanja

Eksperiment je proveden u suradnji s Hrvatskom vojskom (HV) na vojnom poligonu. Postavka eksperimenta na terenu prikazana je na slici 2. Na temeljnu ploču je montirana rešetkasta čelična potporna konstrukcija koja služi za pridržavanje vrha stupa, osiguranje gornjeg rubnog uvjeta te unos uzdužne sile u stup preko čeličnog kljuna. Pri eksperimentalnom ispitivanju postavljeni su senzori na stup i u blizini stupa za mjerenje parametara eksplozije mjerodavnih za analizu ponašanja stupa. Postavljeni su senzori za mjerenje reflektiranih tlakova na prednju površinu stupa, senzori za mjerenje tlaka u slobodnom zraku (upadnih tlakova) oko stupova te akcelerometri i žični potencimetri na stražnjoj strani stupova za mjerenje ubrzanja i pomaka stupa. Opasna oštećenja stupova prikazana su na slici 2. Na svakom od 4 ispitana stupa dobivena su ciljana teorijska oštećenja sukladno tablici 1. Površinska oštećenja bila su karakterizirana samo blagim savojnim pukotinama na spoju stupa i temelja. Umjerena oštećenja karakterizirale su

savojne pukotine po cijeloj visini stupa te ljuštenje betona s prednje strane stupa na mjestu djelovanja eksplozije. Kod teških oštećenja su savojne pukotine bile još izraženije te je u tlačnoj zoni u visini djelovanja eksplozije uočeno drobljenje betona. Opasno oštećenje je značajno narušilo integritet stupa te ga ostavilo u neupotrebljivom stanju (Slika 2) pri čemu je izmjerena značajna zaostala zakrivljenost. Stup je otkazao na posmik, što je karakteristično kada su postavljene veće količine eksploziva blizu stupa. Osim izraženih savojnih pukotina, posmične pukotine su vidljive na bočnim stranama pri čemu je betonska masa zdrobljena.



Slika 2. Postav eksperimenta (lijevo) te prikaz opasnog oštećenja stupa (sredina i desno).

## 4 Zaključak

Provedeno je eksperimentalno ispitivanje utjecaja eksplozija na stupove nadvožnjaka na osnovu kojega se može zaključiti da je moguće s dostatnom pouzdanošću predvidjeti potrebne količine eksploziva za ciljanu razinu oštećenja konstrukcijskih elemenata. Ipak, zbog velikog broja utjecajnih parametara i složenosti samog postupka, neophodna su daljnja eksperimentalna i numerička istraživanja.

### Zahvale

Ovaj rad je sufinancirala Hrvatska zaklada za znanost projektom UIP-2017-05-7041, pod nazivom „Otpornost stupova nadvožnjaka na djelovanje eksplozije“, te im se ovim putem zahvaljujemo.

### Literatura

- [1] Lukić, S. & Draganić, H.; Blast Loaded Columns-State of the Art Review; Applied Sciences-Basel; 2021; 11, 7980-8008; doi:10.3390/app11177980.
- [2] Lukić, S. (2023). Blast load capacity of highway bridge columns. [Disertacija, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek]. Dabar GrAFOS Repository.

# Vibracijska analiza 3D mikropolarnog kontinuuma uz primjenu *fixed-pole* interpolacije

Grbac, L.<sup>1</sup> i Jelenić, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu istražuje se efikasnost primjene mikropolarnih konačnih elemenata kod kojih se za interpoliranje polja pomaka koristi interpolacija temeljena na konceptu nepomičnog pola (*fixed-pole* interpolacija) u odnosu na konvencionalne Lagrangeove konačne elemente pri analiziranju prirodnih frekvencija 3D mikropolarnog kontinuuma. Analizira se kvadratna ploča koja je u prvom primjeru konzolno ukliještena dok je u drugom slučaju ukliještena na sva svoja četiri ruba, a koja se diskretizira s novorazvijenim heksaedarskim izoparametarskim mikropolarnim konačnim elementima. Razmatrane su dvije vrste *fixed-pole* interpolacije: originalna i poboljšana, a na temelju numeričkih rezultata provedenih numeričkih primjera, poboljšana *fixed-pole* interpolacija se pokazala kao najbolji izbor.

**Ključne riječi:** Cosseratova teorija, mikropolarni kontinuum, *fixed-pole* interpolacija, vezana interpolacija, prirodne frekvencije, metoda konačnih elemenata.

---

<sup>1</sup> **Laura Grbac, mag. ing. aedif**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: laura.zikovic@uniri.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Gordan Jelenić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

## 1 Uvod

Klasična (Cauchyjeva) teorija kontinuuma ne uzima u obzir mikrostrukturu materijala neovisno o razmatranoj skali pa samim time ne može ni obuhvatiti *size-effect* fenomen. Kako bi se moglo što preciznije opisati ponašanje heterogenih materijala te obuhvatiti određene efekte, razvile su se razne generalizirane teorije kontinuuma, među kojima spada i ovdje razmatrana mikropolarana (Cosseratova) teorija. U mikropolarnoj teoriji, uz Cauchyjev tenzor napreznja postoji i dodatni tenzor momentnog napreznja čime se povećava broj stupnjeva slobode te sada uz polje pomaka postoji dodatno polje mikrorotacije koje svakoj točki tijela dodjeljuje orijentaciju i potpuno je neovisno o antisimetričnome dijelu gradijenta polja pomaka (makrorotaciji). Utjecaj mikrorotacije vidljiv je kod posmičnih deformacija te dodatno prouzrokuje i kutnu deformaciju (zakrivljenost). Iz toga slijedi da je potrebno poznavati vrijednosti od ukupno šest materijalnih parametara kako bi se moglo opisati ponašanje izotropnog linearno-elastičnog mikropolaranog materijala [1]. Sama teorija se u zadnjih sto godina poprilično razvila, no i dalje ne postoje jedinstvene metode za određivanje nepoznatih mikropolaranah konstanti što predstavlja glavnu zadržku primjene teorije u praktične svrhe. Stoga je razvoj kvalitetnih mikropolaranah konačnih elemenata važan korak u daljnjoj primjeni mikropolarne teorije, gdje ti elementi predstavljaju neophodni preduvjet za efikasnu proceduru identificiranja materijalnih parametara iz eksperimentalnih mjerenja.

## 2 *Fixed-pole* interpolacija

Za aproksimaciju nepoznatog polja pomaka mikropolaranog kontinuuma u okviru metode konačnih elemenata koristiti će se tzv. *fixed-pole* interpolacija inspirirana konceptom nepomičnog pola (eng. *fixed-pole concept*) kojeg su prvi put predstavili Bottasso i Borri u [2], gdje su koncept primijenili u dinamičkoj analizi geometrijskih nelinearnih 3D greda. Glavna karakteristika ovog koncepta je zamjena rezultante momentnog napreznja i specifičnog momenta količine gibanja, koji su u klasičnom pristupu definirani s obzirom na referentnu os grede u poprečnom presjeku, sa novim rezultatama koje su definirane s obzirom na odabranu ishodišnu točku cijelog promatranog sustava (nepomičan pol). Implementacija koncepta pokazuje sposobnost istovremenog očuvanja energije i vektora količine kretanja te momenta količine kretanja, a može se primijeniti na elemente proizvoljnog reda. Uz to, umjesto polja pomaka, koncept prirodno uvodi novo nestandardno kinematičko polje  $\rho$  koje objedinjuje polje pomaka  $\mathbf{u}$  i rotacije  $\Phi$ . Elementi, međutim, pate od neobjektivnosti s obzirom na odabir položaja promatrača, čak i u ravninskoj analizi, i posljedično od neinvarijantnosti deformacija obzirom na pomak krutog tijela. Do unatrag dvije godine nisu bila poznata nikakva istraživanja koncepta u linearnoj analizi gdje se i dalje očekuje jedinstveni opis svih nepoznatih polja kao prednost koncepta, dok složenosti i nedostaci koji se javljaju u nelinearnoj analizi iščekavaju (konfiguracijski tenzor postaje linearan te problem neobjektivnosti nestaje).

Autori su u radu [3] prezentirali primjenu *fixed-pole* interpolacije u linearnoj statičkoj analizi Timošenkove grede (1D mikropolaranah kontinuum) i 3D mikropolaranog kontinuuma. Kod grede je pokazano da se primjenom lineariziranog oblika *fixed-pole* interpolacije u konačnici dobije matrica krutosti koja je jednaka onoj koju bismo dobili uz primjenu Lagrangeove interpolacije, a za koju znamo da će nas dovesti do *shear-locking* problema ukoliko se ne primijeni reducirana numerička integracija. U svrhu njenog poboljšanja u obogaćenom dijelu

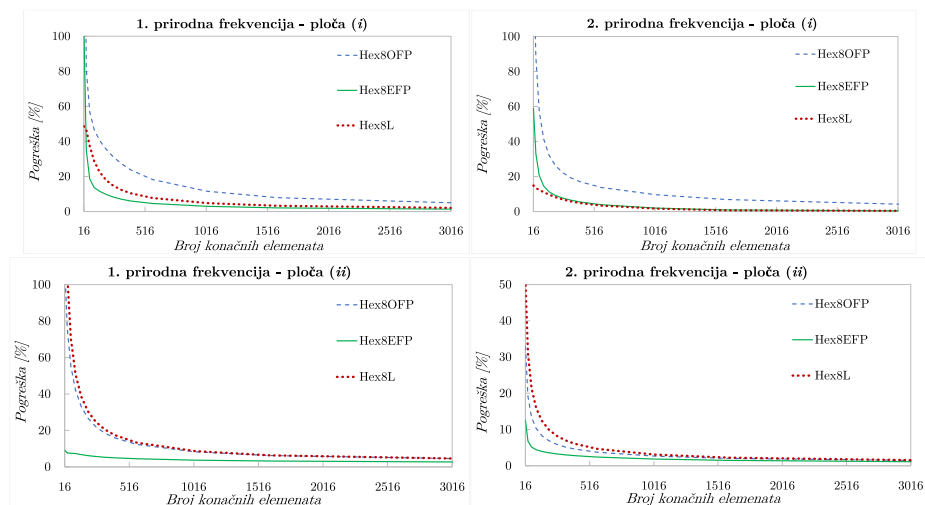
interpoliranog polja pomaka uveden je koeficijent  $n$  koji je jednak broju čvorova pojedinog konačnog elementa duž koordinatne osi, a koji je proizašao iz međusobne usporedbe sa vezanom interpolacijom za koju je poznato da daje točna rješenja za proizvoljno polinomno opterećenje sa dovoljnim brojem čvorova. Na taj način proizlazi poboljšana *fixed-pole* interpolacija u svom općenitom obliku kao [4]

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \left( \boldsymbol{\rho}_i - \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\phi} \right), \quad (1)$$

za proizvoljni broj čvorova konačnog elementa, gdje  $N_i$  predstavlja Lagrangeove polinome  $n - 1$  reda,  $\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{r}_{0,i}$  je početni vektor položaja referentne osi duž grede s obzirom na promatrano ishodište, dok operator  $\hat{\bullet}$  označava antisimetričnu matricu koja zamjenjuje vektorski produkt tako da vrijedi  $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\phi}$ . Polje mikrorotacije se interpolira standardnom Lagranegovom interpolacijom  $\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{\phi}_i$ . Potrebno je imati na umu da je dobivena matrica krutosti izražena za nestandardne stupnjeve slobodne, no ona se vrlo lako može transformirati za standardne preko izraza  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{u} + \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\phi}$ . U statičkoj analizi, ova formulacija uklanja *shear-locking* problem kod greda i generalno uvijek brže konvergira ka točnom rješenju u odnosu na Lagrangeove elemente. U vibracijskoj analizi Timošenkove grede pokazano je da i originalna *fixed-pole* interpolacija (kada je koeficijent  $n = 1$ ) ima povoljnih utjecaja kod formiranje matrice mase, što dovodi do brže konvergencije prirodnih frekvencija, ali samo u slučaju dvočvornih konačnih grednih elemenata dok kod elemenata s više čvorova to poboljšanje iščezava [5]. Motivirani dobrim svojstvima primjene poboljšane *fixed-pole* interpolacije u statičkoj analizi, kao i njene originalne formulacije kod vibracijske analizi Timošenkove grede u dosadašnjem istraživanju, u nastavku se provodi analiza primjene obje vrste *fixed-pole* interpolacije kod 3D mikropolarnog kontinuuma.

### 3 Vibracijska analiza 3D mikropolarnog kontinuuma

Novorazvijeni heksaedarski izoparamteraski mikropolarni konačni elementi s 8 čvorova su implementirani u program *FEAP* koji su bili korišteni za diskretizaciju kvadratne domene duljine stranice  $L = 33.0$  mm i debljine  $h = 3.3$  mm. Za interpolaciju polja pomaka su korištene obje vrste *fixed-pole* interpolacije: originalna (*Hex8OFP*) i poboljšana (*Hex8EFP*; eng. *enhanced*) te su rezultati za prve dvije prirodne frekvencije uspoređene sa rezultatima dobivenim uz primjenu Lagrangeovih elemenata (*Hex8L*), a njihove konvergencijske krivulje su prikazane na Slici 1. Razmatraju se dva slučaja rubnih uvjeta, gdje je u prvom slučaju ploča konzolno ukliještena (*i*), dok je u drugom slučaju ukliještena na sva svoja četiri ruba (*ii*). Referentna numerička rješenja dobivena su za vrlo gustu mrežu *Hex8L* elemenata. Geometrijske i materijalne karakteristike su definirane kao [4]: modul posmika  $G = 104$  MPa, Poissonov koeficijent  $\nu = 0.44$ , modul povezanosti makro- i mikrorotacije  $N = 0.04$ , karakteristične duljine za savijanje  $l_b = 0.33$  mm i torziju  $l_t = 0.62$  mm, polarni omjer  $\psi = 1.5$ , gustoća  $\rho = 2000$  kg/m<sup>3</sup> i materijalna mikroinerzijska gustoća  $J = 10^{-1}$  kg/m. Za razliku od vibracijske analize grede, *OFP* interpolacija nije pokazala nikakvo poboljšanje u odnosu na Lagrangeovu interpolaciju, štoviše za slučaj konzolne ploče ona pruža lošije rezultate. *EFP* interpolacija daje uglavnom najbrže konvergira što je posebno vidljivo za slučaj potpuno ukliještena ploče.



Slika 1. Konvergenjska studija 1. i 2. vlastitih frekvencija ploča (i) i (ii)

## 4 Zaključak

U radu je primijenjena *fixed-pole* interpolacija u svom originalnom i poboljšanom obliku kod vibracijske analize 3D mikropolarnog kontinuuma. Na temelju rezultata provedenih numeričkih primjera pokazano je da *EFP* interpolacija ima najbržu konvergenciju. Više detalja o formulaciji *Hex8EFP* elementa kao dodatne numeričke primjere može se pronaći u [4].

## Zahvale

Prezentirano istraživanje je financirala HRZZ u sklopu rada na projektu (HRZZ-IP-2018-1732 i HRZZ-DOK-2018-09-8806) te je podržano Sveučilišnom potporom uniri-tehnic-18-248 1415.

## Literatura

- [1] Eringen, A. C.; *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. New York: Springer Verlag; 2012.
- [2] Bottasso, C. i Borri, M.; Integrating finite rotations; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 1998; vol. 164, no. 3-4; 307-331.
- [3] Žiković, L. i Jelenić, G.; Fixed-pole interpolacija u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma; *Zbornik radova 10. susreta HDMa*; 2020; 313-318.
- [4] Grbac, L; Jelenić, G. Ribarić, D.; Hexahedral finite elements with enhanced fixed-pole interpolation for linear static and vibration analysis of 3D micropolar continuum; 2023.
- [5] Žiković, L. i Jelenić, G.; Primjena fixed-pole interpolacije u linearnoj dinamičkoj analizi Timošenkovske grede; *Zbornik radova 11. susreta HDMa*; 2021; 369-375.

# O rotacijskim stupnjevima slobode u formulaciji membranskih konačnih elemenata

Grbac, M.<sup>1</sup> i Ribarić, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu dan je kratak pregled klasične teorije ravninske elastičnosti, uz naglasak na vezu između pomaka i rotacija. Prikazano je kako rotaciju točke unutar deformabilnog ravnog tijela dobivamo kroz derivacije polja pomaka. Kratko je objašnjeno zašto se u metodi konačnih elemenata koriste rotacije kao dodatni stupnjevi slobode uz pomake, koje je opravdanje takvog pristupa te koje su prednosti i nedostaci.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, membranski konačni elementi, rotacijski stupnjevi slobode, klasična teorija, ravninska elastičnost, deformacija

---

<sup>1</sup> **dr. sc. Marin Grbac**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Ul. Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: marin.grbac@uniri.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Dragan Ribarić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Ul. Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: dragan.ribaric@uniri.hr

## 1 Uvod

Klasična teorija elastičnosti počiva na dobro utvrđenim teoretskim pretpostavkama te je općeprihvaćena već više od jednog stoljeća. Prema teoriji, postoje dva međusobno ortogonalna polja pomaka u problemima ravninske elastičnosti koje opisuju ponašanje deformabilnog tijela u ravnini. Jednostavan i pouzdan konačni element za numeričko rješavanje problema ravninske elastičnosti prezentiran je u ranim danima metode konačnih elemenata [1]. Radi se o izoparametarskom konačnom elementu s tri čvora koji se uobičajeno naziva CST (*eng. Constant Strain Triangle*, odnosno trokut s konstantnim deformacijama), a zbog svoje jednostavnosti i pouzdanosti i danas se učestalo koristi. Međutim, element općenito nije učinkovit u smislu davanja točnih rješenja na rjeđim mrežama konačnih elemenata.

Tijekom godina predlagana su razna poboljšanja, od kojih mnoga uvode rotacije kao dodatne nepoznate parametre problema. Rani pokušaji takvog pristupa nisu bili uspješni, a glavni problem bilo je povezivanje čvornih rotacija s pomacima duž stranica elementa, što je vrlo dobro objašnjeno i ilustrirano u [2]. Nasuprot tome, to nije problem kod konačnih elemenata debelih greda ili ploča. Iako takav pristup zapravo nije u skladu s teorijom ravninske elastičnosti, nije niti protivan konceptu metode konačnih elemenata, te se je pokazao se vrlo pogodnim u primjeni. Boutagouga je nedavno u [3] napravio opsežan pregled konačnih elemenata koji su razvijeni za rješavanje problema ravninske elastičnosti, tzv. membranski konačni elementi, koji kao dodatne nepoznate parametre, odnosno stupnjeve slobode, imaju rotacije.

## 2 Klasična teorija ravninske elastičnosti

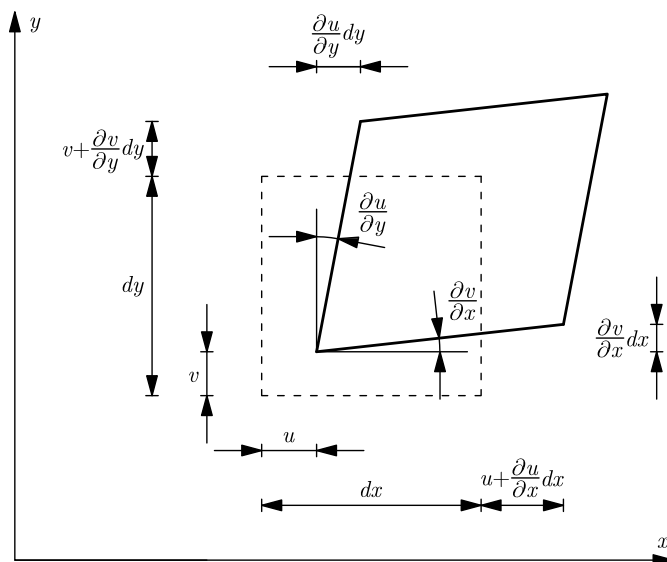
Ponašanje ravnog deformabilnog tijela u Kartezijevom koordinatnom sustavu opisuje se pomoću dva međusobno ortogonalna polja pomaka:  $u(x, y)$  u smjeru osi  $x$  te  $v(x, y)$  u smjeru osi  $y$ . Slika 1. prikazuje jedno od mogućih stanja u kojem se diferencijalni element može naći nakon pomicanja i deformiranja. Uz to, vrijedi pretpostavka malih deformacija, koje se mogu zapisati preko kinematičkih jednadžbi kao

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

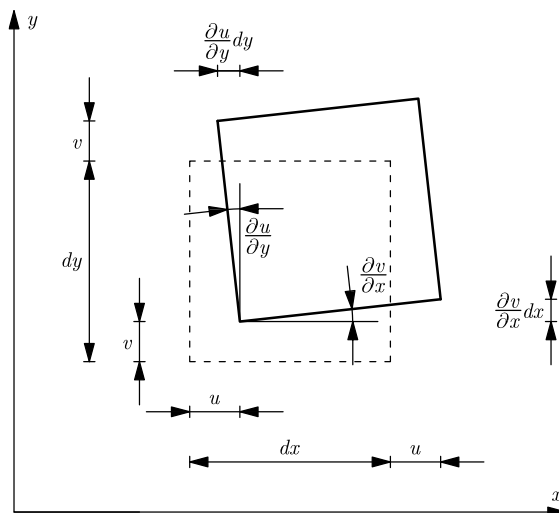
U slici 1. može se primijetiti da će rotacija diferencijalnog elementa ovisiti o  $\partial v/\partial x$  te  $\partial u/\partial y$ , što znači da rotacija nije neovisna o pomacima. Ako zamislimo stanje u kojemu se diferencijalni element ne deformira, već samo translata i rotira (kruti pomak), dolazimo do slike 2. Sada primjećujemo da je rotacija diferencijalnog elementa u iznosu jednaka  $\partial v/\partial x$ , ali i  $\partial u/\partial y$ , te je možemo zapisati kao

$$\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$





Slika 1. Diferencijalni element nakon pomicanja i deformiranja



Slika 2. Diferencijalni element nakon translacije i rotacije

Na kraju, rotaciju točke unutar deformabilnog ravnog tijela dobivamo usrednjavanjem kao

$$\theta_z(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

### 3 Membranski konačni elementi s rotacijskim stupnjevima slobode

Postavlja se pitanje zašto se rotacije koriste kao (dodatni) stupnjevi slobode iako teorija jasno ukazuje da one nisu nezavisni parametri? Ono što metoda konačnih elemenata dopušta je to da ti parametri zapravo i ne moraju biti stvarne rotacije, već slobodni parametri višeg reda koji obogaćuju polja pomaka u svrhu povećanja učinkovitosti elementa. Vrijednosti koje poprimaju u rješenjima sustava obično nemaju nikakav fizikalni značaj. Tako koncipirani elementi su generalno vrlo učinkoviti, a primjeri istih se mogu naći npr. u [4,5].

S druge strane, moguće je osigurati da ti parametri višeg reda budu stvarne rotacije čvorova, npr. ako interpolacijske funkcije polja pomaka zadovoljavaju jednadžbu (3). U tom slučaju rješenje metode konačnih elemenata dati će točne rotacije čvorova, dodatno su dozvoljena i momentna opterećenja čvorova, osigurana je kompatibilna veza sa drugim tipovima konačnih elemenata, te je u formulaciji ravnih ljuski osigurana nesingularnost globalne matrice krutosti u svim slučajevima. Takvi elementi su generalno manje učinkoviti u usporedbi s onima koji ne sadrže stvarne rotacije, a primjeri istih se mogu se naći npr. u [6,7].

### 4 Zaključak

U radu je dan kratak osvrt na korištenje rotacijskih stupnjeva slobode u formulaciji membranskih konačnih elemenata, s naglaskom na teorijsku pozadinu te na prednosti i nedostatke u primjeni.

### Zahvale

Autori zahvaljuju Hrvatskoj zakladi za znanost (istraživački projekti ASDEL IP-2016-06-4775 i FIMCOS IP-2018-01-1732) na financijskoj potpori.

### Literatura

- [1] Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. & Topp, L.J.; Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures; Journal of the Aeronautical Sciences; 1956.; 23; 805-823.
- [2] Bergan, P.G. & Felippa, C.A.; A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1985.; 50; 25-69.
- [3] Boutagouga, D.; A Review on Membrane Finite Elements with Drilling Degree of Freedom; Archives of Computational Methods in Engineering; 2021.; 28; 3049-3065.
- [4] Allman, D.J.; A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis; Computers & Structures; 1984.; 19; 1-8.
- [5] Cen, S., Zhou, M.J. & Fu, X.-R.; A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions; Computers & Structures; 2011.; 89; 517-528.
- [6] Ibrahimbegović, A., Taylor, R.L. & Wilson, E.L.; A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom; International Journal for Numerical Methods in Engineering; 1990.; 30; 445-457.
- [7] Felippa, C.A.; A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2003.; 192; 2125-2168.

# Numerički model raslojavanja ploča

Hlača, I.<sup>1</sup> i Ribarić, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

Raslojavanje ploča je česti oblik sloma kompozita i lijepljenih spojeva. U ovome radu se predstavlja numerički model raslojavanja na testu dvostruke konzole. U njemu se aluminijske ploče ponašaju linearno elastično, dok je međusloj odnosno ljepilo koje ih povezuje konstitutivno opisano modelom kohezivne zone. Taj model omogućuje postepeni gubitak nosivosti, a time i propagaciju pukotine. Numerička simulacija pomoću kontrole pomaka traži ravnotežu u svakom inkrementu pomaka tako da iterativno minimizira rezidual za pojedini inkrement. Takav proračun je računalno zahtjevan što vodi tome da, čak i kada je rješenje konvergiralo, odaziv konstrukcije ima prividno oscilatorno ponašanje vidljivo na nazubljenom sila-pomak dijagramu. Iz tog razloga su bitni parametri numeričkog modela koji utječu na konvergenciju u smislu efikasnosti i robusnosti proračuna. Iako su parametri kohezivne zone ključni za uspješnu konvergenciju, ovdje analiziramo utjecaj odabranog oblika konstitutivnog zakona međusloja i utjecaj formulacije kinematički kompatibilnih konačnih elemenata ploča i međusloja.

**Ključne riječi:** numerički model, raslojavanje, test dvostruke konzole, efikasnost, robusnost

---

<sup>1</sup> **Ivan Hlača, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: ivan.hlaca@uniri.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Dragan Ribarić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: dragan.ribaric@uniri.hr

## 1 Konačni elementi ploča i međusloja

Test dvostruke konzole se obično koristi da bi se eksperimentalno odredila lomna otpornost ljepila [1]. Otvaranjem dva kraja konzole dolazi do progresivne propagacije pukotine i povećanja kraka konzola. Test dvostruke konzole se najčešće numerički opisuje konačnim elementima.

Metoda konačnih elemenata [2] je diskretni matematički model koji mehanički kontinuum opisuje sustavom parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Kod problema iz mehanike, rješenje se aproksimira minimiziranjem potencijalne energije. Osim poznatih rubnih uvjeta i podijele domene u konačne elemente između pojedinih čvorova, potrebna je definicija interpolacijskih funkcija koja pretpostavlja rješenje između čvornih pomaka i rotacija.

### 1.1 Konačni element ploče

Slojevi odnosno ploče testa dvostruke konzole se mogu opisati gredama, pločama (i ljuskama) ili 3D elementima. Analitički se opisuju gredama, dok se za numeričke modele obično koriste 3D elementi koji radi velikog potrebnog broja stupnjeva slobode nisu računalno efikasni. S druge strane, grede nisu primjerene obzirom da, posebno pri manjim duljinama pukotine, štapni model ne opisuje najbolje geometriju problema. Onda preostaju ploče ili ljuske, a obzirom da se ovdje raslojavanje ostvaruje samo u otvarajućem obliku (mod I), ploče su primjeren odabir.

Kao što postoje Euler-Bernoullijeva i Timošenkova gredna teorija ovisno o postojanju posmičnih deformacija, tako za ploče postoje Kirchhoffova i Mindlinova teorija ploča [2]. Osim što Mindlinova teorija uzima u obzir posmične deformacije, lateralni pomaci i rotacije presjeka se mogu zasebno interpolirati, a za dobiti deformacijsku energiju je dovoljna samo prva derivacija.

U ovome radu se razmatraju dvije takve formulacije, i to četvero-čvornih elementa ploča koji dobro opisuju regularnu geometriju problema. Prvi je Q4U3 [3] element na bazi pomaka s kubnom vezanom interpolacijom koji se pokazao robusnim na rijetkim mrežama. Drugi je Q4-LIM [4] odnosno mješoviti tip elementa, također s vezanom interpolacijom. Taj element je ugrađen u računalni program FEAP koji je razvijen pod vodstvom Bob Taylora.

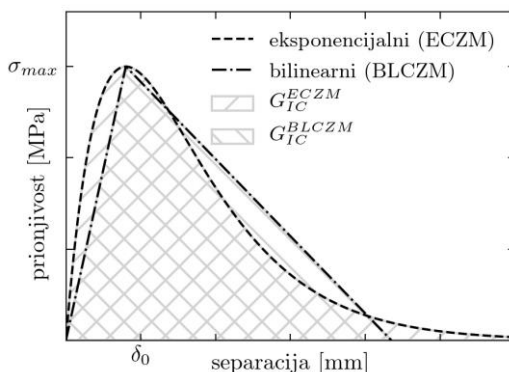
### 1.2 Konačni element međusloja

Tanki međusloj (eng. *interface*) se obično opisuje kohezivnim konačnim elementima bez debljine (eng. *zero-thickness*) obzirom da se isti materijalno definiraju parametrima kohezivne zone tj. separacijom umjesto deformacije. Broj čvorova međusloja [5] može biti 2 u slučaju Winklerove opruge [6], 4 kada međusloj povezuje grede ili membrane u ravninskom problemu odnosno za tzv. INT4, ili 8 kada međusloj povezuje ploče (i ljuske) ili 3D elemente sloja u prostornom problemu odnosno za tzv. INT8.

Obzirom da međusloj povezuje ploče, odabran je INT8 međusloj, a njegova 4 čvora odgovaraju čvorovima donjeg četvero-čvornog elementa dok preostalih 4 čvora se podudara s čvorovima gornjeg elementa. Stupnjevi slobode međusloja su obogaćeni kutovima zaokreta koji su kinematički kompatibilni [7] s kutevima zaokreta ploče, i to kroz kvadratnu vezanu interpolaciju.

Konstitutivni zakon međusloja je opisan modelom kohezivne zone pomoću odnosa između naprezanja tj. napona prionjivosti (eng. *traction*) i separacije tj. relativnog pomaka između dva susjedna čvora. Odnos između tih veličina može biti opisan različitim krivuljama, a

u ovome radu se razmatra bilinearni (BLCZM) [5] i eksponencijalni oblik (ECZM) [8], koji su prikazani na Slici 1.



Slika 1. Bilinearni i eksponencijalni oblik konstitutivnog zakona

Kako bi oni bili usporedivi u analizama, moraju se zadati identični parametri karakteristične duljine separacije i odgovarajućeg maksimalnog napona prionjivosti, kao na gornjem prikazu. Isto tako, neovisno o odabranom konstitutivnom modelu, površina ispod krivulje mora biti jednaka lomnoj žilavosti ili tzv. kritičnoj promjeni oslobođene energije  $G_{IC}$  (eng. *critical energy release rate*). Zaključno je vrijedno napomenuti da na testu dvostruke konzole nema rasterećenja stoga nije potrebno modelirati oštećenje u strogoj smislu, već je za propagaciju pukotine dovoljno da krutost (eng. *penalty stiffness*) tj. derivacija konstitutivnog zakona bude (otprilike) jednaka nuli.

## 2 Numerička analiza konvergencije

Model kohezivne zone je snažan alat za modeliranje propagacije pukotine, čak i kada nije poznata pozicija inicijalne pukotine. Glavno ograničenje metode je ograničenje veličine konačnog elementa odnosno potrebna gustoća mreže konačnih elemenata što otežava primjenu metode u praksi. Naime, velike promjene napona prionjivosti u blizini kohezivne zone iziskuju u pravilu veći broj elemenata u toj zoni [9]. Kako tijekom simulacije pukotina propagira, te se time i kohezivna zona pomiče, potreban je veći broj elemenata duž cijelog područja gdje se očekuje delaminacija da bi rješenje uspješno konvergiralo.

Konvergencija ima samo dva ishoda, ali poteškoće u konvergenciji kroz neuspješne iteracije se manifestiraju kroz prividne oscilacije (eng. *spurious oscillations*) u sila-pomak dijagramu ili u duljem vremenu računanja, tj. kroz neefikasnost proračuna. Jednostavan način da se postigne konvergencija je progušćenje mreže konačnih elemenata što neminovno vodi i do veće zahtjevnosti numeričkog proračuna. Iz tog razloga je uspješna konvergencija na rijetkoj mreži dobar kriterij za robusnost proračuna.

Sve analize su provedene za geometrijske i materijalne parametre iz Tablice 1., te materijalne parametre aluminijske i inicijalnu pukotinu duljine 50 mm. Dani podaci odgovaraju stvarnom eksperimentalnom testu dvostruke konzole koji ima značajno veću širinu od uobičajene.

Tablica 1. Geometrijski i materijalni parametri

duljina/širina/debljina ploče L/B/h	parametri kohezivne zone $\delta_0, \sigma_{MAX}, G_{IC}$
250/120/8 mm	0.005 mm, 122 MPa, 1.66 N/mm <sup>2</sup>

Koristan je i podatak o duljini kohezivne zone (eng. *cohesive zone length*) odnosno duljini zone oštećenja. Obzirom da postoji više empirijskih izraza, odabran je izraz koji se dobro podudara sa eksperimentalnim mjerenjima i virtualnim eksperimentima (nije prikazano u radu), a taj izraz predviđa sljedeću vrijednost,

$$l_{CZ} = \left( \frac{E' G_{IC}}{\sigma_{MAX}^2} \right)^{1/4} h^{3/4} = 7 \text{ mm.} \quad (1)$$

## 2.1 Analiza utjecaja elementa međusloja na konvergenciju

Razmatra se međusloj s eksponencijalnim ili bilinearnim konstitutivnim zakonom, te kvadratnom vezanom interpolacijom ili običnom linearnom interpolacijom separacije međusloja. Linearna interpolacija je dobivena zanemarivanjem članova kvadratne razine u kvadratnoj vezanoj interpolaciji. Rezultati analize su prikazani u Tablici 2, s oznakom - za neuspješnu konvergenciju.

Tablica 2. Indikatori konvergencije za odabrane modele međusloja na različitim mrežama

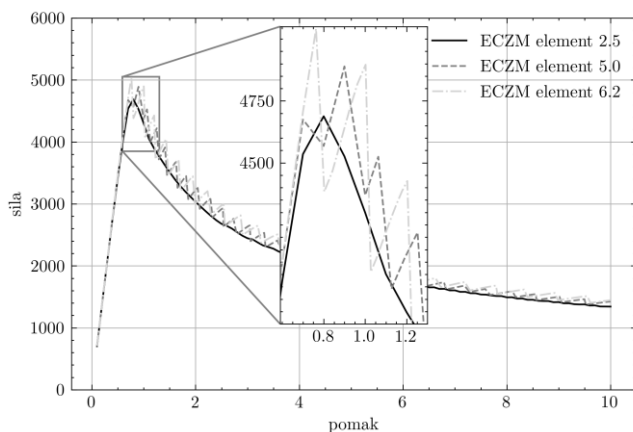
gustoća mreže konačnih elemenata	ECZM vezana interpolacija	ECZM linearna interpolacija	BLCZM vezana interpolacija	BLCZM linearna interpolacija
<b>1.25 x 1.25 mm</b> <b>34560 elemenata</b>	3089 s (51 min) 690 iteracija	3125 s (52 min) 703 iteracija	3257 s (54 min) 684 iteracija	3576 s (60 min) 703 iteracija
<b>2.50 x 2.50 mm</b> <b>8640 elemenata</b>	297 s (5 min) 707 iteracija	300 s (5 min) 716 iteracija	-	293 s (5 min) 716 iteracija
<b>5.00 x 5.00 mm</b> <b>2160 elemenata</b>	113 s (2 min) 2294 iteracija	-	-	-
<b>6.25 x 6.00 mm</b> <b>1440 elemenata</b>	56 s (1 min) 2036 iteracija	-	-	-

Kada se uspoređuju rezultati za najgušću mrežu, nema značajnih razlika u robusnosti ni u efikasnosti. Sljedeća mreža je nešto rjeđa te ima otprilike 3 elementa duž jedne kohezivne zone, kako i je preporuka iz literature. Iznenadujuće da ovdje bilinearni konstitutivni zakon nije konvergirao upravo u slučaju vezane interpolacije koja inače pokazuje bolje performanse [10].

Na sljedećim mrežama, eksponencijalni konstitutivni zakon se pokazuje znatno robusnijim od bilinearnog, i to u varijanti vezane interpolacije s kojom jedini konvergira na čak dvije najrjeđe mreže, i to veoma brzo. U tim slučajevima je vidljiv značajan porast ukupnog broja iteracija do čega dolazi radi FEAP-ove sheme rezanja veličine inkrementa pomaka (pseudo-vremena). Neovisno o tipu međusloja, ukoliko broj iteracija u pojedinom inkrementu premaši definiranu granicu, aktivira se procedura privremenog rezanja inkrementa po sljedećem pravilu,

$$\Delta t_{new} = \min(\Delta t_{max}, 10^{\log(\Delta t_{old})+0.2}). \quad (2)$$

Nakon uspješne konvergencije s manjim inkrementom, inkrement se postepeno povećava na sličan način prema izvorno zadanom inkrementu. Neobično da za najzahtjevniju mrežu, duljine elementa čak 6.25 mm, je potrebno nešto manje iteracija nego za mrežu s elementom duljine 5.00 mm, možda jer duljina elementa otprilike odgovara duljini kohezivne zone. U svakom slučaju, za te dvije mreže (5.00 mm i 6.00 mm) su posebno izražene prividne oscilacije u sila-pomak dijagramu za eksponencijalni zakon na Slici 2. (rezultati za prva dva stupca Tablice 2.). Konačno, treba naglasiti da su prikazani rezultati dobiveni za Q4U3 formulaciju ploče.



Slika 2. Prividne oscilacije sila pomak dijagrama za eksponencijalni oblik konstitutivnog zakona (brojke 2.5, 5.0 i 6.2 označavaju duljinu konačnog elementa)

## 2.2 Analiza utjecaja elementa ploče na konvergencija

Razmatra se ploča formulacije Q4U3 ili Q4-LIM, i to u izvornim Mindlin varijantama te u imitaciji Kirchhoffove teorije dobivenoj isključivanjem posmičnih deformacija definiranjem veoma velike posmične krutosti. To nije profinjen pristup, ali svejedno vodi do efikasnijeg proračuna, kako je prikazano u Tablici 3. Naravno, iako je "Kirchhoff formulacija" efikasnija, u isto vrijeme precjenjuje vršnu silu za 2 %. Rezultati su dobiveni za međusloj s vezanom interpolacijom u ECZM varijanti (2.50 x 2.50 mm). Formulacija ploče Q4-LIM se pokazala bržom od Q4U3, ali ista ne konvergira na rjeđim mrežama (5.00 x 5.00 mm i 6.25 x 6.00 mm).

Tablica 3. Indikatori konvergencije za odabrane modele ploče

	Q4U3 (Mindlin)	Q4-LIM (Mindlin)	Q4U3 (Kirchhoff)	Q4-LIM (Mindlin)
Vrijeme izračuna	293 s (5 min)	267 s (4 min)	251 s (4 min)	218 s (4 min)
Broj iteracija	707	704	606	566
Vršna sila	4691 N	4691 N	4812 N	4824 N

Russo i Chen [9] su ispravno očekivali da bi posmične deformacije (Timošenkove ili Mindlinove teorije) riješile problem oscilacija u naponu prijanjaja neposredno uz kohezivnu zonu. Ipak, posmične deformacije stvaraju probleme u konvergenciji, vjerojatno radi sada nekontinuirane progibne linije u istom tom području, što može biti predmet daljnjeg istraživanja.

### 3 Zaključak

Simulacija delaminacije je računalno zahtjevan problem i zato je teško simulirati stvarne konstrukcije koje su obično mnogo veće od laboratorijskih uzoraka. Iako se konačni element ploče Q4-LIM pokazao efikasnim, Q4U3 se pokazao veoma robusnim, dok od analiziranih modela međusloja se najbolje pokazala kinematički kompatibilna formulacija vezane interpolacije s eksponencijalnim oblikom konstitutivnog zakona. Prikazani model konvergira s veličinom elementa koja odgovara duljini kohezivne zone, i to bez korištenja metode duljine luka (eng. *arc length*) [5] ili geometrijske nelinearnosti [9].

#### Literatura

- [1] B. ISO. 25217: 2009; Adhesives–Determination of the Mode I Adhesive Fracture Energy of Structural Adhesive Joints Using Double Cantilever Beam and Tapered Double Cantilever Beam Specimens; 2009. ; British Standard.
- [2] Zienkiewicz, O. C. i Taylor, R. L.; Finite Element Method: Volume 1, Fifth Edition; Butterworth-Heinemann; 2000.; Oxford.
- [3] Ribaric D.; Problem-dependent cubic linked interpolation for Mindlin plate four-node quadrilateral finite elements; Structural engineering and mechanics: An international journal; 2016.; 59(6); 1071–1094.
- [4] Auricchio, F. i Taylor, R. L.; A shear deformable plate element with an exact thin limit; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1994.; 118(3); 393–412.
- [5] Alfano G. i Crisfield, M. A.; Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues; International Journal for Numerical Methods in Engineering; 2001.; 50(7); 1701–1736.
- [6] Reedy, E. D., Mello, F. J. i Guess, T. R.; Modeling the Initiation and Growth of Delaminations in Composite Structures; Journal of Composite Materials; 1997.; 31(8); 812– 831.
- [7] Dávila, C., Camanho, P., i Turon, A.; Effective Simulation of Delamination in Aeronautical Structures Using Shells and Cohesive Elements; Journal of Aircraft; 2008.; 45.
- [8] Xu, X. P. i Needleman, A.; Continuum Modelling of Interfacial Decohesion; Solid State Phenomena; 1993.; 35-36; 287–302.
- [9] Russo R. i Chen B.; Overcoming the cohesive zone limit in composites delamination: modeling with slender structural elements and higher-order adaptive integration; International Journal for Numerical Methods in Engineering; 2020.; 121(24); 5511–5545.
- [10] Ranjbar, M., Škec, L., Jelenić, G. i Ribarić, D., Mixed-mode delamination of layered structures modeled as Timoshenko beams with linked interpolation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2023.; 124(8); 1773-1797.



# Primjena Kempeovih mehanizama u suvremenoj transportnoj tehnici

Hoić, M.<sup>1</sup> i Miler, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

U konstrukciji podiznih platformi moderne tendencije uključuju primjenu elektromotornog pogona umjesto hidrauličnog radi izbjegavanja kontaminacije hidrauličnim uljem te smanjenja troškova, kako investicijskih, tako i troškova održavanja kroz inovativna konstrukcijska rješenja. Ovaj rad razmatra primjenu polužnih mehanizama opisanih u djelu A. B. Kempea koji su karakterizirani rotacijskim ulazom, (približno) translacijskim izlazom te primjenom isključivo zglobnih veza te stoga omogućavaju pogon električnim motorima, precizan pomak tereta te izbjegavanje linearnih vodilica čime se smanjuju investicijski troškovi.

**Ključne riječi:** podizna platforma, Kempeov mehanizam, Wattov mehanizam, Robertsov mehanizam, Tschebishevljevi mehanizam

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. Matija Hoić, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: matija.hoic@fsb.hr

<sup>2</sup> dr. sc. Daniel Miler, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

## 1 Uvod

Podizne platforme učestali su uređaji iz područja transportnih uređaja čije je osnovna namjena podizanje tereta i/ili ljudi između dvije horizontalne ravnine, najčešće s visinom dizanja do 2 m iako postoje rješenja do 10 m visine dizanja. Izvode se u stacionarnim kao i u pokretnim rješenjima.

Najčešće primijenjeno rješenje podiznih platformi temelji se na škarastom mehanizmu pogonjenom hidrauličnim cilindrom. U novije doba glavni nedostaci ovakvog rješenja, pored nelinearnog odnosa pogonske sile i tereta [1] uključuju moguću kontaminaciju hidrauličnim uljem te relativno velike troškove proizvodnje zbog uporabe hidraulike kao i potrebe za glodanjem voznih staza kotačića škarastog mehanizma. Posljedično, mogućnosti napretka uključuju razvoj sustava koji bi hidraulični pogon zamijenili elektromotorom kao dio općenite tendencije elektrifikacije te u smanjenju troškova kroz primjenu mehanizama koji ne koriste članove s linearnim gibanjem. Pritom se želi zadržati linearni pomak koji ostvaruje škarasti mehanizam, odnosno, eventualno odstupanje od idealno linearnog pomaka mora biti unutar uobičajenih odstupanja uslijed proizvodnih tolerancija i/ili deformacija pod opterećenjem.

U knjizi „How to Draw a Straight Line“ [2] objavljenoj 1877., A. B. Kempe razmatra nekoliko polužnih mehanizama bez linearnih članova koji opisuju približno linearno ili stvarno linearno gibanje kako bi riješio problem ostvarivanja linearnog gibanja na radnom članu uređaja u doba kada se linearne vodilice tek razvijaju. Dodatno, ulazno gibanje mehanizama je rotacijsko kako bi se omogućio pogon tada korištenih parnih strojeva. Posljedično, iako su razlozi bili drugačiji, Kempe razmatra mehanizme s istim osnovnim karakteristikama kakvi bi bili korisni i za suvremena unapređenja podiznih platformi.

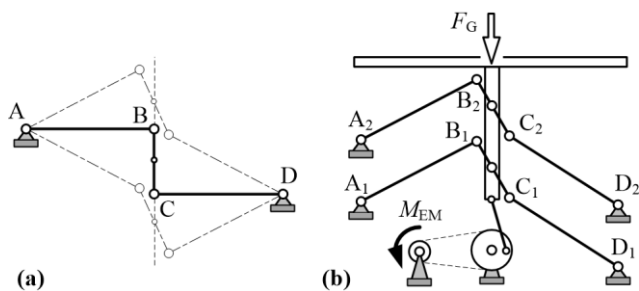
Ovdje će se opisati prijedlog primjene mehanizama koje Kempe opisuje u svojoj knjizi u konstrukciji podiznih platformi, iako bi se slični prijedlozi mogli dati i za niz drugih transportnih uređaja kao i drugih mehanizama koji se tipično izvode koristeći linearne vodilice.

## 2 Mehanizmi s približno linearnim gibanjem

Kempe započinje s opisom tri poznata polužna mehanizma drugih autora koji opisuju približno linearno gibanje, a koji uključuju Wattov, Robertsov i Tschebishevľjov mehanizam.

### 2.1 Wattov mehanizam

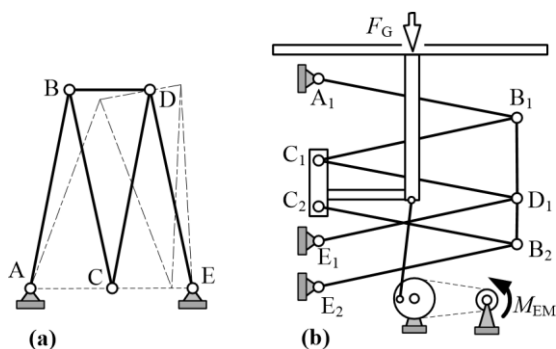
Wattov mehanizam (slika 1a) sastoji se od tri poluge (AB, BC i CD) povezane s dva zgloba te dvije zglobne fiksne točke (A i D) na koje se vežu dvije duže, krajnje poluge (AB i CD). Prijedlog formiranja podizne platforme (slika 1b) uključuje dva Wattova mehanizma na koja se spaja sama platforma, a koji osiguravaju platformu od prevrtanja. Elektromotorni pogon koji generira pogonski moment ( $M_{EM}$ ) spojen je na platformu putem mehanizme poluge i zamašnjaka što omogućava podizanje tereta ( $F_G$ ), iako je moguće predložiti i drugačija rješenja.



Slika 1. Wattov mehanizam (a) i prijedlog podizne platforme (b)

## 2.2 Robertsov mehanizam

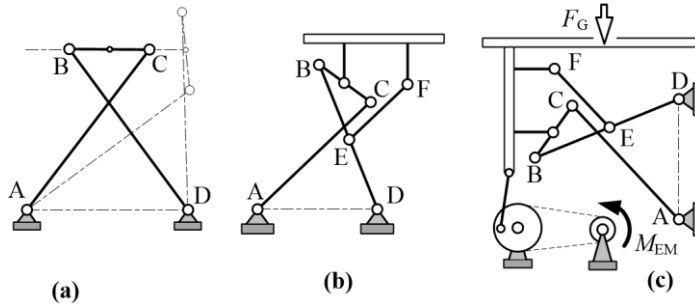
Robertsov mehanizam (slika 2a) sastoji se od pet poluga. Tri poluge formiraju jednakokračni trokut (BC, CD i BD) čija su dva vrha uz najkraću stranicu (B i D) vezana preko poluga na zglobne fiksne točke (A i E), dok preostali vrh (C) opisuje približno linearno gibanje. Prijedlog formiranja podizne platforme (slika 2b) uključuje mehanizam proširen dodatnim setom fiksne točke s pripadajućom polugom i produženjem kraće stranice jednakokračnog trokuta čime se dobivaju dvije točke s istovjetnim približno linearnim gibanjem što osigurava stabilnost pripadajuće platforme. Spajanje pogona ostvareno je na isti način kao i kod Wattovog mehanizma.



Slika 2. Robertsov mehanizam (a) i prijedlog podizne platforme (b)

## 2.3 Tschebishevljov mehanizam

Tschebishevljov mehanizam (slika 3a) sastoji se od tri poluge pri čemu su dvije duže poluge (AC i BD) vezane na fiksne točke (A i D), ukrižene i spojene na suprotnim krajevima kraćom polugom (BC) čija središnja točka opisuje približno linearno gibanje. Osnovni prijedlog pomične platforme (slika 3b) predložio je sam Tschebishev i opisan je u Kempeovoj knjizi. Prijedlog formiranja podizne platforme (slika 3c) stoga je jednostavno formirati.



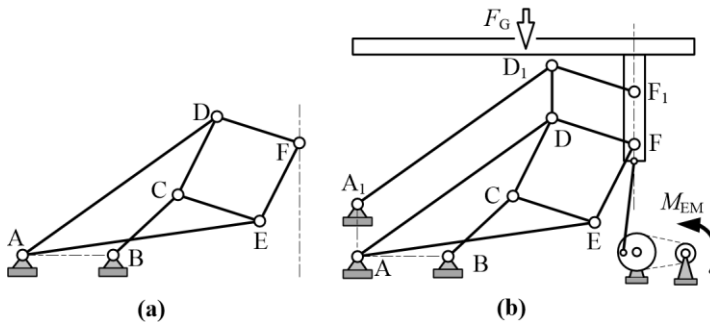
Slika 3. Tschebishevľjov mehanizam - osnovni (a) i osnovna platforma (b) te prijedlog podizne platforme (c)

### 3 Mehanizmi sa stvarnim linearnim gibanjem

Kod mehanizama sa stvarnim linearnim gibanjem, Kempe započinje s opisom Peaucellier Lipkin mehanizma iz kojeg potom predlaže različite varijante svog mehanizma od kojih će se ovdje razmatrati tri.

#### 3.1 Peaucellier Lipkin mehanizam

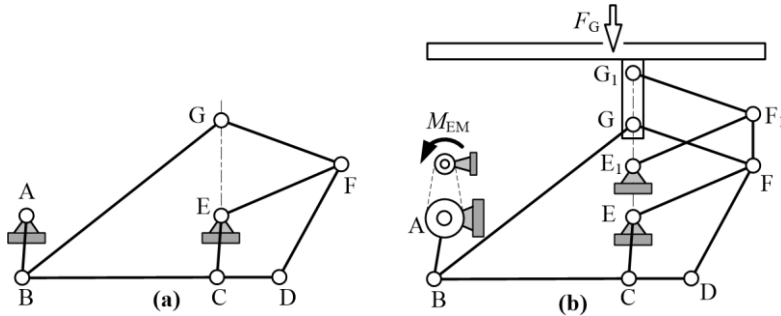
Peaucellier Lipkin mehanizam (slika 4a) sastoji se od sedam poluga i dvije fiksne točke (A i B) pri čemu su dvije najduže poluge (AD i AE) vezane na jednu fiksnu točku, jedna poluga (BC) je vezana na drugu fiksnu točku dok su preostale četiri jednake poluge (CD, DF, EF i CE) spojene u četverokut pri čemu su tri ujedno vezane na kraj poluga spojenih na fiksne točke (C, D i E) dok preostali četvrti spoj (F) opisuje stvarnu ravnu liniju. Prijedlog formiranja podizne platforme (slika 4b) uključuje dodatni set poluga koje osiguravaju dvije točke koje opisuju istu ravnu liniju ( $F$  i  $F_1$ ) čime daju stabilnost platformi.



Slika 4. Peaucellier Lipkin mehanizam (a) i prijedlog podizne platforme (b)

### 3.2 Kempe 1 mehanizam

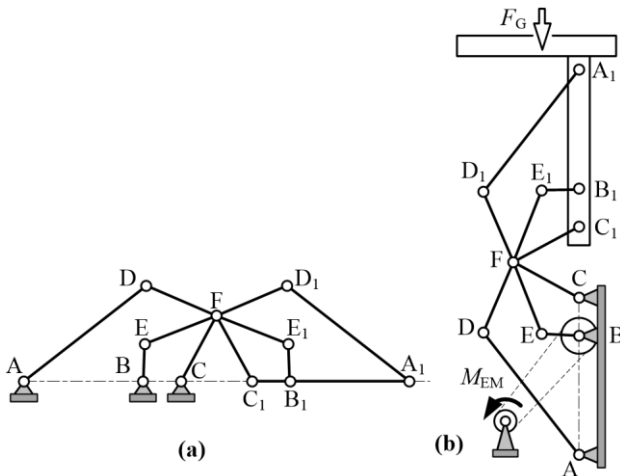
Kempe mehanizmi bazirani su na po dva seta četverokutnih setova poluga gdje su dvije duže poluge (BD i BG) dvostruko duže od dvije kraće (DF i FG) pri čemu je jedna kraća poluga većeg seta (DF) ujedno duža poluga kraćeg seta. Kod osnovnog mehanizma (ovdje nazvanog Kempe 1, slika 5a) za rotaciju krajnje lijeve poluge (AB), vršna točka mehanizma (G) opisuje stvarnu ravnu liniju. Predloženi mehanizam podizne platforme (slika 5b) uključuje dodatne paralelne poluge koje osiguravaju stabilnost platforme.



Slika 5. Kempe 1 mehanizam (a) i prijedlog podizne platforme (b)

### 3.3 Kempe 2 mehanizam

Kempe 2 mehanizam (slika 6a) uključuje varijaciju osnovnog mehanizma koja ne uključuje dodatnu rotirajuću polugu, ali sadrži simetrični set poluga pri čemu su gornja i srednja poluga lijevog (DF i EF) i desnog seta ( $D_1F$  i  $E_1F$ ) spojene u po jednu polugu (EFD<sub>1</sub> i DFE<sub>1</sub>). Kako se horizontalna poluga desnog seta ( $C_1B_1A_1$ ) giba pravocrtno duž svoje osi, formiranje prijedloga podizne platforme je jednostavno (slika 6b).



Slika 6. Kempe 2 mehanizam (a) i prijedlog podizne platforme (b)



# Detekcija inženjerskih parametara ortotropnog mikropolarnog materijala

Jurković, D.<sup>1</sup> i Ribarić, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

Mikropolarni kontinuum je materijalni model koji, pretpostavljanjem dodatnog polja pomaka (polje mikrorotacija), bolje opisuje materijale s izraženom mikrostrukturom od klasičnog elastičnog kontinuuma. U svrhu modeliranja materijala umjetno stvorene mikrostrukture kao ortotropnog mikropolarnog kontinuuma provedeni su virtualni eksperimenti kako bi se detektirali njegovi homogenizirani inženjerski parametri. Definirana je jedinična ćelija (eng. representative volume element – RVE) promatrane mikrostrukture te su njenim umnožavanjem generirani uzorci za virtualne eksperimente. Na generirane uzorke postavljeni su rubni uvjeti u obliku nanesenih prisilnih pomaka te su iz rezultata izvedeni homogenizirani inženjerski parametri: tri modula elastičnosti i šest Poissonovih koeficijenata. Asimptotskom analizom dobivenih parametara dobiveni su inženjerski parametri promatrane strukture na makro razini. Time su ostvareni uvjeti da se uz analizu čistog savijanja nosača istovjetne strukture detektiraju dodatni mikropolarni inženjerski parametri potrebni za opisivanje takvog stanja naprezanja – četiri karakteristične duljine za savijanje.

**Ključne riječi:** ortotropni mikropolarni kontinuum, čisto savijanje, virtualni eksperimenti, homogenizacija, asimptotska analiza

---

<sup>1</sup> **Damjan Jurković, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: damjan.jurkovic@gradri.uniri.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Dragan Ribarić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: dragan.ribaric@gradri.uniri.hr

## 1 Uvod i prethodna istraživanja

Izotropni mikropolarni (Cosseratov) kontinuum definiran je sa šest materijalnih parametara koje možemo interpretirati kao šest inženjerskih parametara: modul elastičnosti  $E$ , Poissonov koeficijent  $n$ , karakteristična duljina za savijanje  $l_b$  i torziju  $l_t$ , mjera povezanosti makrorotacije i mikrorotacije  $N$  i polarni omjer  $\Psi$ . Prilikom analize problema čistog savijanja mikropolarnog kontinuuma, uvođenjem rubnih uvjeta u konstitutivne jednadžbe kao u [1] postaje očito kako su, za ovo stanje naprezanja, potrebna samo prva tri navedena parametra. No u slučaju čistog savijanja ortotropnog mikropolarnog kontinuuma problem postaje složeniji i potrebno je tražiti sveukupno 13 inženjerskih parametara. To su tri modula elastičnosti ( $E_x$ ,  $E_y$  i  $E_z$ ), šest Poissonovih koeficijenata ( $n_{xy}$ ,  $n_{xz}$ ,  $n_{yx}$ ,  $n_{yz}$ ,  $n_{zx}$  i  $n_{zy}$ ) te, prema [2], četiri karakteristične duljine za savijanje ( $l_{b,1}$ ,  $l_{b,2}$ ,  $l_{b,3}$  i  $l_{b,4}$ ). Poissonovi koeficijenti indeksirani su tako da prvi indeks označava smjer deformacije paralelne nanesenom opterećenju, a drugi indeks smjer deformacije okomite istom opterećenju.

Konstitutivna jednadžba klasičnog ortotropnog kontinuuma za smjer normalnih naprezanja glasi:

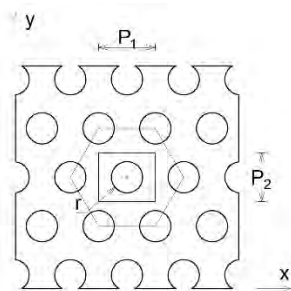
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{n_{yx}}{E_y} & -\frac{n_{zx}}{E_z} \\ -\frac{n_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{n_{zy}}{E_z} \\ -\frac{n_{xz}}{E_x} & -\frac{n_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pošto je matrica podatljivosti simetrična, ovakav kontinuum definiran je sa šest, a ne sa svih devet međusobno nezavisnih parametara. Cilj ovoga rada je detekcija inženjerskih parametara iz matrice (1) kako bi se u budućem istraživanju mogle detektirati mikropolarne karakteristične duljine za savijanje.

U svrhu određivanja materijalnih parametara Beveridge i ostali u [3] su generirali periodičnu nesimetričnu heksagonalnu strukturu perforiranjem aluminijskih nosača u pravilnom rasteru (Slika 1). Parametarska struktura definirana je promjerom perforacije  $r = 3,5$  mm, horizontalnim odmakom između dvije perforacije  $P_1 = 9$  mm i vertikalnim odmakom između dvije perforacije  $P_2 = 12,7$  mm. Takva struktura je s obzirom na veličinu  $P_1$  u [3] nazvana LMD (low mass density).

Diplomski rad [1] bavi se potragom homogeniziranih ortotropnih mikropolarnih inženjerskih parametara ove geometrije. U tu svrhu definirana je jedinična ćelija označena na slici 1. Modul elastičnosti u smjeru osi  $z$ ,  $E_z$  dobiven je množenjem modula elastičnosti aluminija s odnosom površina jedinične ćelije i površine pravokutnika istih duljina stranica. U svrhu dobivanja ostalih inženjerskih parametara jedinična ćelija aksijalno je opterećena u smjeru osi  $x$  u jednom virtualnom eksperimentu, te u smjeru osi  $y$  u drugom. Tim postupkom dobivene su vrijednosti parametara  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $n_{xy}$ ,  $n_{xz}$ ,  $n_{yx}$ ,  $n_{yz}$ . Uvrštavanjem dobivenih rezultata u matricu podatljivosti iz (1), radi uvjeta njene simetričnosti utvrđena je pogreška od 46,22% te su dobivene vrijednosti modula elastičnosti  $E_x$ ,  $E_y$  zanemarene. Pomoću rezultata virtualnih eksperimenata čistog savijanja nosača LMD strukture različitih dimenzija određen je homogeniziran modul elastičnosti u smjeru osi  $x$  kao funkcija visine presjeka nosača  $E_x^*(h)$ .





Slika 1. Umjetno proizvedena LMD struktura aluminijskih nosača

Izražavanjem svih inženjerskih parametara koji se pojavljuju u analitičkom rješenju za deformaciju  $\varepsilon_x$  nosača ortotropnog mikropolarnog materijala opterećenog na čisto savijanje izvedenu u istom radu preko nepoznatog parametra  $E_x$  i izjednačavanjem s navedenom funkcijom  $E_x^*(h)$  dobivene su vrijednosti materijalnih parametara  $E_x$  i  $l_b$  te posljedično i  $E_y$ ,  $n_{zx}$  i  $n_{zy}$  iz uvjeta simetričnosti matrice podatljivosti (1). Potrebno je naglasiti kako je u ovom postupku pretpostavljeno da je jedna karakteristična duljina za savijanje  $l_b$  dovoljna za opisivanje ortotropnog mikropolarnog kontinuuuma. Bouyge i ostali pokazali su u [2] kako to nije točno te su za opisivanje ovog potrebne četiri karakteristična duljina za savijanje  $l_b$ .

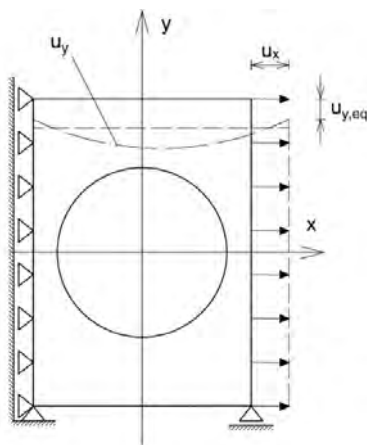
## 2 Virtualni eksperimenti na generiranim uzorcima

U svrhu detekcije inženjerskih parametara provedeni su virtualni eksperimenti metodom konačnih elementa na jediničnoj ćeliji (eng. representative volume element - RVE) LMD strukture. Iako se radi o periodičnoj heksagonalnoj strukturi jedinična ćelija odabrana je kao za pravokutnu strukturu jer su aluminijski nosači koje će se upotrijebiti u nastavku istraživanja formirani s horizontalnim rubovima bez diskontinuiteta. Jedinična ćelija aksijalno je opterećena tako da je na jednoj stranici nanesen kontinuiran pomak dok je pomak u istom smjeru na nasuprotnoj stranici onemogućen. Veličina pomaka određena je tako da uzrokuje homogeniziranu deformaciju u istom smjeru veličine  $10^{-3}$ . Sprječen je kruti pomak u okomitom smjeru fiksiranjem jednog čvora kao što je prikazano na slici 2. Isti postupak ponovljen je preslikavanjem rubnih uvjeta za  $90^\circ$ .

Problem je analiziran kao slučaj ravninskog naprezanja. Virtualni eksperimenti provedeni su pomoću računalnog programa FEAP 8.5.2j. Optimalna mreža konačnih elemenata odabrana je temeljem konvergencijske analize na jediničnoj ćeliji te se sastoji od 116 čvorova povezanih sa 160 tročvornih *solid* ravninskih elemenata.

Umnožavanjem jedinične ćelije u horizontalnom i vertikalnom smjeru faktorom dva generirani su uzorci za provedbu asimptotske analize na njihovim inženjerskim parametrima. Tako dobiveni uzorci nazvani su 2x2, 4x4, 8x8, 16x16 i 32x32, ovisno o faktoru preslikavanja RVE-a, a pritom je uzorak jedinične ćelije sa slike 2 nazvan 1x1. Potrebno je ukazati kako su horizontalni rubovi kontinuirani za sve uzorke, dok središta perforacija tvore diskontinuitete u vertikalnim rubovima (osim uzorka 1x1). Odabirom RVE-a s ugaonim oslabljenjima diskontinuiteti bi bili prisutni na svim rubovima uzoraka, no pretpostavljeno je kako je ovim odabirom, kao za slučaj pravokutne

strukture, *boundary effect* koji se pojavljuje pri čistom savijanju već uzet u obzir prilikom homogenizacije.

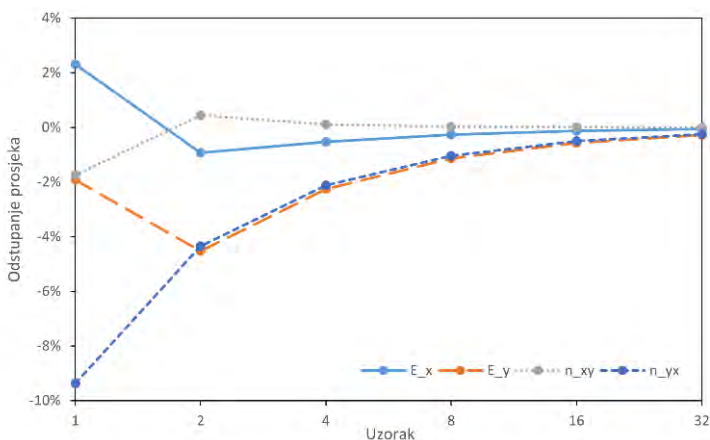


Slika 2. Jedinična ćelija s nanesenim pomakom u smjeru  $x$

### 3 Utvrđivanje inženjerskih parametara i asimptotska analiza

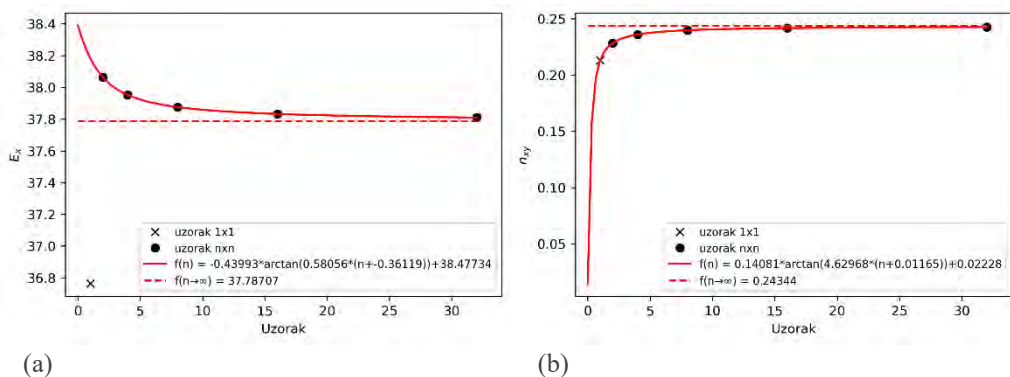
Razmotrimo prvi eksperiment pri kojem je na lijevoj stranici uzorka  $1 \times 1$  nanesen jednolični pomak u smjeru osi  $x$ ,  $u_x$  (slika 2). Ekvivalentan pomak gornjeg ruba u smjeru osi  $y$ ,  $u_{y,eq}$ , dobiven je izjednačavanjem površine koju zatvara funkcija pomaka čvorova na gornjem rubu  $u_y(x)$  s ekvivalentnom pravokutnom površinom pomaka. Uz duljinu uzorka u smjeru  $y$  dobivena je homogenizirana deformacija uzorka  $\varepsilon_y$ . Homogenizirano naprezanje  $\sigma_x$  dobiveno je pomoću sume ekvivalentnih reakcija u čvorovima na lijevoj stranici u smjeru osi  $x$  te njenim dijeljenjem s visinom uzorka. Ekvivalentna reakcija u čvoru određena je istom analogijom kao ekvivalentan pomak, izjednačavanjem površine koju zatvara funkcija reakcija na lijevom rubu  $R_x(y)$  s ekvivalentnom pravokutnom površinom reakcija. Homogenizirana deformacija u smjeru osi  $z$  dobivena je sumiranjem deformacija u svakom elementu ponderiranih površinom vlastitog elementa te izjednačavanjem tog volumena s ekvivalentnim volumenom kvadra omeđenim pravokutnikom dimenzija uzorka. Temeljem odnosa homogeniziranih deformacija u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  te naprezanju u smjeru osi  $x$  dobiveni su parametri  $E_x$ ,  $n_{xy}$  i  $n_{xz}$ . Preslikavanjem rubnih uvjeta za  $90^\circ$  istovjetno su dobiveni  $E_y$ ,  $n_{yx}$  i  $n_{yz}$ . Modul elastičnosti  $E_z$  dobiven je analitičkim putem kao u [1] te je ostvaren jednak rezultat,  $E_z = 48,022$  GPa.

Vrijednosti pomaka i naprezanja za parametre  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $n_{xy}$  i  $n_{yx}$  izračunate su i uprosječivanjem čvornih vrijednosti duž ruba i uspoređeni s prethodno dobivenim vrijednostima. Na slici 3 prikazano je kretanje u odstupanju vrijednosti dobivenih na ova dva načina. Vidljivo je kako povećanjem broja elemenata na rubu uzorka vrijednosti parametara međusobno konvergiraju. To se događa sporije za parametre  $E_y$  i  $n_{yx}$  radi diskontinuiteta u vertikalnim rubovima uzoraka čije čvrne vrijednosti utječu na ova dva parametra.



Slika 3. Konvergencija odstupanja parametara dobivenih na dva načina

Gore opisani postupak primijenjen je na sve generirane uzorke te je uočeno kako vrijednosti parametara konvergiraju prema nekoj vrijednosti. Iznimka tome je modul elastičnosti u smjeru  $z$  koji je konstantan za sve uzorke, čime je potvrđeno da je geometrija uzoraka ispravno generirana. Na vrijednosti inženjerskih parametara provedena je regresijska analiza s nekoliko funkcija te je zaključeno kako funkcija inverznog tangensa najbolje opisuje ove podatke. Također, uočeno je kako vrijednosti modula elastičnosti  $E_x$  i  $E_y$  uzoraka  $1 \times 1$  odstupaju od trenda konvergencije ostalih uzoraka te su stoga vrijednosti svih parametara tog uzorka izuzete iz aproksimacije. Na slici 4a križićem je prikazana vrijednosti parametra  $E_x$  za uzorak  $1 \times 1$ , točkama vrijednosti istog parametra za ostale uzorke, punom linijom prikazana je aproksimacijska funkcija inverznog tangensa te crtkanom linijom vrijednost prema kojoj ona konvergira. Na slici 4b vrijednosti su prikazane istom analogijom za parametar  $n_{xy}$ . Ovdje je vidljivo kako vrijednost tog parametra za uzorak  $1 \times 1$  pada na aproksimacijsku funkciju iako nije uzet u obzir prilikom aproksimacije. To je slučaj i kod ostalih Poissonovih koeficijenata, osim kod  $n_{yz}$ , čija vrijednost uzorka  $1 \times 1$  blago odstupa od aproksimacijske funkcije.



Slika 4. Konvergencija vrijednosti  $E_x$  (a) i  $n_{xy}$  (b)

Temeljem uvjeta simetričnosti matrice podatljivosti (1) utvrđeni su Poissonovi koeficijenti  $n_{zx}$  i  $n_{zy}$ , te su time detektirani svi inženjerski parametri koji iznose:

$$E_x = 37,787 \text{ GPa} \quad E_y = 28,623 \text{ GPa} \quad E_z = 48,022 \text{ GPa},$$

$$n_{xy} = 0,2434 \quad n_{xz} = 0,1566 \quad n_{yx} = 0,1839 \quad n_{yz} = 0,1186 \quad n_{zx} = 0,1990 \quad n_{zy} = 0,1990.$$

Prema istom uvjetu je provedena kontrola dobivenih vrijednosti te je utvrđena pogreška od 0,26% koji možemo prepisati zaokruživanju vrijednosti. Ovako dobiveni parametri se uvelike razlikuju od onih dobivenih u [1]. Zanimljivo je uočiti kako su članovi matrice podatljivosti iz (1)  $-\frac{n_{xz}}{E_x}$  i  $-\frac{n_{yz}}{E_y}$ , a posljedično i  $-\frac{n_{zx}}{E_z}$  i  $-\frac{n_{zy}}{E_z}$  jednaki.

## 4 Zaključak

Dio problema koji su se pojavili prilikom modeliranja materijala LMD strukture kao ortotropnog mikropolarnog kontinuuma u [1] ovdje su razriješeni. Primjenom asimptotske analize pogreška u uvjetu simetričnosti matrice podatljivosti smanjena je s 46,22% na 0,26%. Postupak dobivanja triju modula elastičnosti i šest Poissonovih koeficijenata značajno je pojednostavljen u odnosu na prethodni postupak. U sljedećem koraku predviđena je detekcija četiriju karakterističnih duljina na savijanje temeljem modificiranja metode provedenoj u [1] gdje je pretpostavljeno kako je za opis ortotropnog mikropolarnog kontinuuma potrebna samo jedna karakteristična duljina za savijanje  $l_b$  što se pokazalo neispravnim. Verifikacija dobivenih parametara planirana je provođenjem analize čistog savijanja grednih nosača izrađenih prema [3] mikropolarnim konačnim elementima te usporedbom tih rezultata s onima dobivenim klasičnim konačnim elementima i laboratorijskim eksperimentima. Na taj će se način utvrditi točnost u vrijednostima između parametara predstavljenih ovdje i u [1].

## Zahvale

Rad je nastao kao rezultat aktivnosti u okviru znanstvenog projekta Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum (HRZZ-IP-2018-01-1732), kojega financira Hrvatska zaklada za znanost te sveučilišne potpore Sveučilišta u Rijeci Computational and Experimental Procedures for Assessment of Material Parameters in Cosserats' Continuum (uniri-tehnic-18-248 1415).

## Literatura

- [1] Jurković D.; Čisto savijanje u ortotropnoj mikropolarnoj elastičnosti; Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku; 2022.
- [2] Bouyge F., Jasiuk I., Boccara S. i Ostoja-Starzewski M.; A micromechanically based couple-stress model of an elastic orthotropic two-phase composite; Eur J Mech - ASolids; 2002; 21(3); 465–81.
- [3] Beveridge A.J, Wheel M.A i Nash D.H.; The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials; Int J Solids Struct; 2013; 50(1); 246–255.

# Oslonac ostvaren vijčanim spojem: različite opcije modeliranja metodom konačnih elemenata

Kačmarčik, J.<sup>1</sup>, Konjatić, P.<sup>2</sup> i Katinić, M.<sup>3</sup>

## Sažetak

U radu su primijenjeni i pokazani različiti načini modeliranja oslonca ostvarenog pomoću vijčanog spoja u komercijalnom programu za analizu metodom konačnih elemenata Solidworks. Kao primjer je razmatran sklop oslonca i jednog konstrukcijskog elementa (nosača), spojenih prednapregnutim vijčanim spojem, opterećenih kombinacijom aksijalnog opterećenja i savijanja. Definirano je pet različitih postavki rubnih uvjeta na osnovu kojih su napravljeni MKE modeli. U dvije postavke je razmatran sklop nosača i oslonca s vijčanim spojem, u preostale tri samo nosač gdje je s rubnim uvjetima zamijenjen utjecaj preostalih elemenata sklopa. Uspoređeni su rezultati za ekvivalentno naprezanje na dva karakteristična mjesta na nosaču. Različitim postavkama su dobiveni slični rezultati za vrijednosti maksimalnog naprezanja na kritičnom presjeku, dok su se vrijednosti naprezanja na mjestu vijčanog spoja znatno razlikovale uslijed različitih načina numeričkog modeliranja.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, vijčani spoj, rubni uvjeti, analiza naprezanja

---

<sup>1</sup> v. prof. dr. sc. Josip Kačmarčik, Univerzitet u Zenici, Mašinski fakultet, Fakultetska 1, 72000 Zenica, e-mail: josip.kacmarcik@unze.ba

<sup>2</sup> prof. dr. sc. Pejo Konjatić, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: pkonjatic@unisb.hr

<sup>3</sup> izv. prof. dr. sc. Marko Katinić, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: mkatinic@unisb.hr

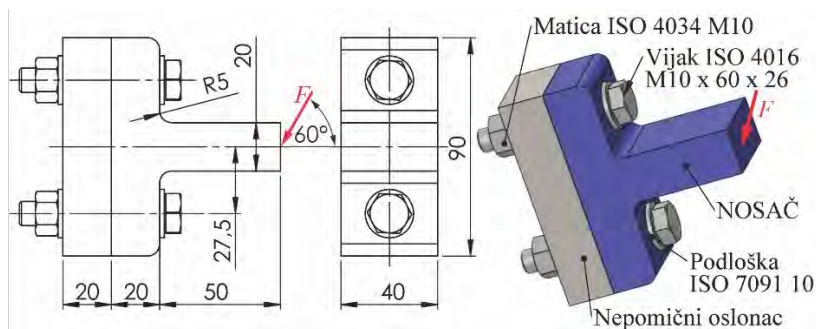
## 1 Uvod

Napredak i razvoj brojnih komercijalnih programskih rješenja temeljenih na metodi konačnih elemenata (MKE) imao je za posljedicu široku i gotovo neizbježnu primjenu ove metode u konstruiranju u različitim inženjerskim granama u posljednjim desetljećima. Korištenjem MKE programa, inženjeri mogu relativno jednostavno doći do rezultata, no važno je napomenuti da ti rezultati mogu biti netočni ukoliko se alat ne koristi na ispravan način. Ispravno definiranje modela i rubnih uvjeta igra ključnu ulogu u postizanju točnih rezultata pomoću numeričke simulacije primjenom MKE [1,2].

U ovom radu će se razmatrati analiza naprezanja u elementu koji se oslanja pomoću vijčanog spoja, koji se vrlo često susreće u raznim konstrukcijama. Na jednostavnom primjeru će se pokazati nekoliko različitih pristupa mogućih u MKE pri definiranju modela i njegovih rubnih uvjeta. U radu se koristio komercijalni program Solidworks [3], ali pokazani načini definiranja modela i dobiveni rezultati su primjenjivi i za druge MKE programe.

## 2 Opis analiziranog problema

Analizirat će se naprezanja u jednostavnom konstrukcijskom elementu, nosaču, opterećenom silom  $F = 12$  kN, koja izaziva kombinirano opterećenje na savijanje i tlak. Element je vezan s dva vijčana spoja za nepomični oslonac, vidjeti sliku 1. Sve dimenzije, elementi vijčanog spoja i opterećenje su proizvoljno usvojene, u skladu s normama i inženjerskom praksom u konstruiranju [1], kao primjer za ovaj rad. Sila prednapreznja vijaka je proračunata i usvojena na osnovu čvrstoće materijala vijka (čelik 8.8) u iznosu od  $F_{pr} = 15$  kN. Za materijal nosača i oslonca je usvojen konstrukcijski čelik S355.



Slika 1. Sklop elementa koji se analizira (nosač) s dva vijčana spoja i osloncem, opterećen na savijanje i tlak

Maksimalno naprezanje u nosaču se javlja na kritičnom presjeku kod prijelaznog zaobljenja (polumjer 5 mm) i može se izračunati kao zbroj normalnog naprezanja uslijed savijanja i tlačnog naprezanja. Primjenom klasičnog analitičkog proračuna [4] dobije se nominalna vrijednost  $\sigma_{nom} = 190,37$  MPa (ovdje se neće prikazati cijeli postupak radi ograničenog prostora). Uzimajući u obzir koncentraciju naprezanja, za problem savijanja pravokutne ploče s prijelaznim zaobljenjem (filetom), prema [5], faktor koncentracije naprezanja je  $K_t = 1,44$ , te je vrijednost

maksimalnog naprezanja  $\sigma_{\max} = 274,133$  MPa. Zanemarujući opterećenje nosača silom  $F$ , približna, srednja vrijednost tlačnog naprezanja uslijed sile prednaprezanja vijka, na površini kontakta podloške i nosača, se može izračunati u vrijednosti od  $\sigma_{tl} = 68,454$  MPa.

### 3 Definiranje modela u MKE

Pri definiranju MKE modela u radu je iskorištena ravnina simetrija te se koristilo samo pola modela sklopa (ili nosača). Primijenjeno je pet različitih načina (postavki) za definiranje vijčanog spoja u MKE analizi naprezanja nosača. Kod prve dvije postavke (A1 i A2) je u MKE modeliran sklop, a kod preostale tri (B1, B2 i B3) je korišten samo model nosača, gdje je pomoću rubnih uvjeta modeliran utjecaj vijčanog spoja i oslonca. Kratki opisi svake postavke su dani u tablici 1.

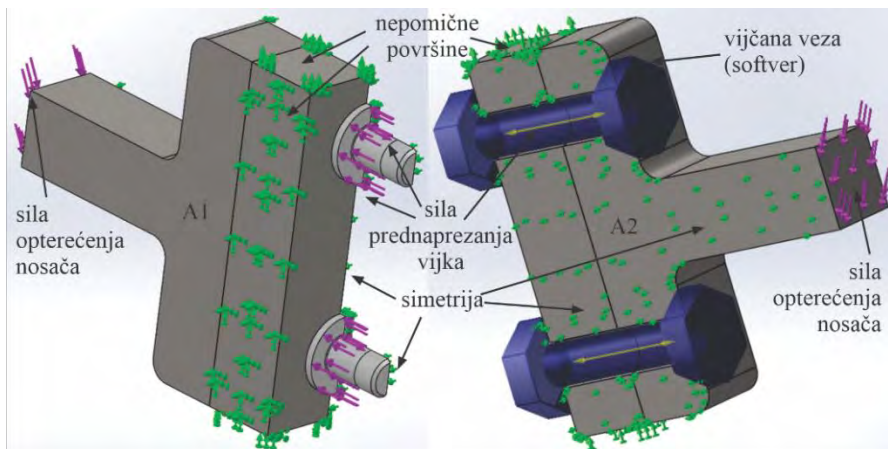
Tablica 1. Različite postavke numeričkih modela u MKE

Postavka	Kratki opis
A1	Modeliran cijeli sklop, osim matica čiji je utjecaj zamijenjen sa silom prednaprezanja vijaka.
A2	Modeliran sklop nosača i oslonca u kojem su elementi vijčanog spoja zamijenjeni s numeričkom vezom koju automatski generira program.
B1	Modeliran samo nosač, zanemaren utjecaj glave vijka.
B2	Modeliran samo nosač, utjecaj glave vijka modeliran nepomičnom vezom.
B3	Modeliran samo nosač, utjecaj glave vijka modeliran tlačnim opterećenjem.

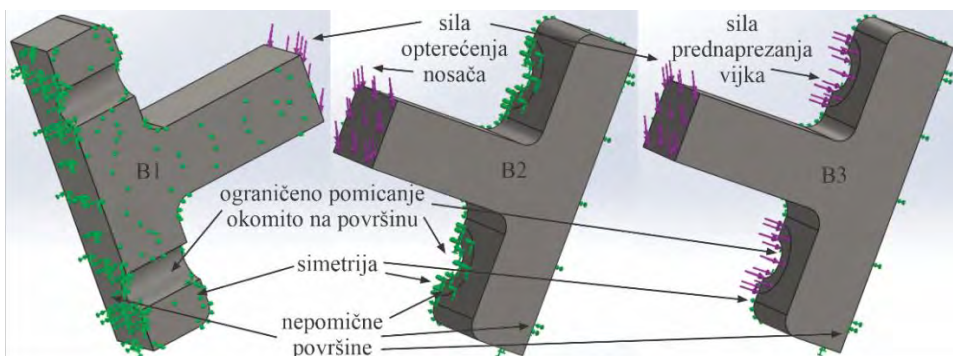
Postavka A1 je najkompletnija i mehanički najrealnija, gdje su u MKE modelirani svi elementi osim matica, čiji utjecaj je zamijenjen sa silom prednaprezanja vijaka, na površinama vijka i podloške, koje su u kontaktu s maticom, vidjeti sliku 2. U ovoj postavci je između cilindričnih površina vijaka i cilindričnih otvora (nosač, oslonac, podloške), gdje je moguć kontakt uslijed opterećenja tijekom numeričke simulacije (postoji zračnost u neopterećenom spoju), definiran kontakt bez prodora (*no penetration*), a na ostalim površinama, koje su u stalnom kontaktu s tlakom uslijed prednaprezanja vijka (glava vijka, nosač, oslonac, navrtke), definiran je „lijepljeni“ (*bonded*) kontakt. Kod postavke A2 je napravljeno pojednostavljenje sklopa zamjenom elemenata vijčanog spoja s opcijom vijčanog spoja u Solidworksu (slika 2), gdje se svi rubni uvjeti na površinama koje su vezane automatski generiraju pomoću programa. Pri definiranju ove veze je u opcijama programa bilo potrebno definirati dimenzije i materijal elemenata vijčanog spoja, te prednaprezanje vijka. Ovdje treba naglasiti da na rezultate naprezanja u okolini glave vijka znatno utječe dimenzija promjera glave vijka (matice). Kako u uputama programa ovo pitanje nije precizno definirano, u radu je korišten manji promjer koji odgovara otvoru odgovarajućeg ključa (16 mm) i koji odgovara površini preko koje se prenosi sila u vijku.

Kod preostale tri postavke (B1, B2 i B3) je u MKE analizi korišten samo model nosača, a utjecaj preostalih elemenata sklopa je definiran s rubnim uvjetima na površinama u kontaktu s njima. Oslonac je definiran s nepomičnom površinom, a tijelo i navoj vijka s ograničenim okomitim (radijalnim) pomicanjem na cilindričnoj površini otvora za vijak, vidjeti sliku 3. Razlika između ove tri postavke bila je u definiranju utjecaja glave vijka (točnije podloške ispod

glave vijka). Kod postavke B1 je zanemaren, kod postavke B2 je definiran s nepomičnom vezom, a kod postavke B3 s tlačnim opterećenjem koje odgovara sili prednapreznja vijka. Ovi rubni uvjeti su definirani na površini nosača koja bi bila u kontaktu s podloškom (slika 3).



Slika 2. Rubni uvjeti za postavke A1 i A2 u kojima je numerički modeliran sklop



Slika 3. Rubni uvjeti za postavke B1, B2 i B3 u kojima je numerički modeliran samo nosač

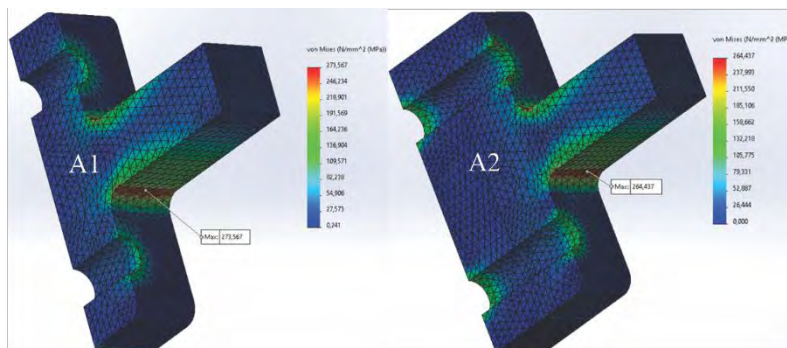
Kod svih postavki je primijenjena automatska opcija za generiranje mreže s prilagođavanjem zaobljenjima (*curvature-based*) s odabranom finom veličinom mreže uz veličinu elemenata od 2,3 mm. Korišteni su standardni Solidworks trodimenzionalni elementi 2. reda s međučvorovima u obliku tetraedra.

#### 4 Rezultati MKE analize

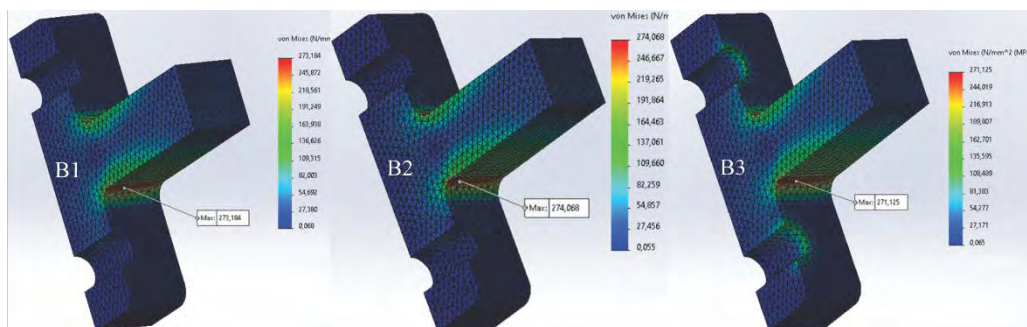
Kako zadano opterećenje izaziva složena napreznja u nosaču, iz praktičnih razloga i radi jednostavnije analize čitavog dijela, kao rezultati MKE analize su razmatrana i uspoređivana ekvivalentna von Mises napreznja (slike 4 i 5). Kako je i predviđeno analitičkim proračunom, maksimalna napreznja su uočena na prijelaznom zaobljenju. Očekivano, najveće razlike između



različitih postavki MKE modela su uočena na površinama nosača u kontaktu s podloškom ispod glave vijka. U tablici 2. su dani očitani rezultati za maksimalnu vrijednost von Mises napreznja na ovim karakterističnim mjestima.



Slika 4. Rezultati MKE analize (von Mises napreznje) za postavke A1 i A2.



Slika 5. Rezultati MKE analize (von Mises napreznje) za postavke B1, B2 i B3.

Tablica 2. Rezultati MKE analize za različite postavke numeričkih modela u MKE

Postavka	Maksimalno von Mises napreznje u MPa	
	površina zaobljenog prijelaza (filet)	površina ispod podloške (glave vijka)
A1	273,567	120,767
A2	264,437	171,008
B1	273,184	26,916
B2	274,068	58,798
B3	271,125	165,612

Ukoliko se postavka A1 uzme kao najrealističnija, analizom rezultata napreznja na površinama u kontaktu s vijčanim spojem, može se zaključiti da postavke A2 i B3 daju rezultate s većim vrijednostima napreznja od stvarnih, a postavke B1 i B2 manje. Veće vrijednosti se mogu objasniti s apsolutnom krutošću kojom se definira vijčani spoj u Solidworksu (A2) i

djelovanje tlačnog opterećenja (B3). Manje vrijednosti u postavkama B1 i B2 su uslijed zanemarivanja glave vijka (B1) i sile prednaprezanja u vijku (B2).

Za dobivene rezultate za maksimalno naprezanje na prijelaznom zaobljenju nema većih odstupanja između svih postavki, a rezultati odgovaraju i analitičkom proračunu. Dakle, ukoliko naprezanja uslijed sile u vijčanom spoju nisu cilj analize, svaki od opisanih postupaka u radu pruža mjerodavne rezultate.

## 5 Zaključak

Pravilno definiranje rubnih uvjeta je ključno za točan postupak MKE analize, i u ovom radu je cilj bio pokazati različite pristupe koji se mogu primijeniti u inženjerskoj praksi kod modeliranja oslonca ostvarenog vijčanim spojem. Rezultati pokazuju da se može koristiti svaki od prikazanih pristupa, uz uvjet da se razumiju ograničenja svakog načina modeliranja vijčanog spoja, jer u svakom pristupu se neki detalji više ili manje zanemaruju ili pojednostavljuju.

Odluka o izboru načina modeliranja rubnih uvjeta u MKE analizi zavisi od cilja same simulacije, tj. rezultata koji se žele analizirati. Za pravilno definiranje rubnih uvjeta i naknadnu analizu rezultata je potrebna stručnost i iskustvo, koje podrazumijevaju znanje o mehaničkom ponašanju sustava, proceduri MKE analize, kao i mogućnostima MKE programa koji se koristi.

## Literatura

- [1] Norton, R. L.; Machine Design, An Integrated Approach, 4ed; Prentice Hall; 2011.
- [2] Kačmarčik, J., Konjatić, P., Turk, D. i Radojičić, S.; Analiza naprezanja u elementima cilindričnog zgloba: različite opcije rubnih uvjeta u MKE; Zbornik radova 11. susreta Hrvatskog društva za mehaniku, Rijeka; 2021; str. 125-132.
- [3] SolidWorks 2021; ©1995-2021 Dassault Systemes SolidWorks Corporation (www.solidworks.com).
- [4] Žiga, A. i Kačmarčik, J.; Otpornost materijala 1; Univerzitet u Zenici, Mašinski fakultet; 2020.
- [5] Pilkey W. D i Pilkey D. F.; Peterson's Stress Concentration Factors, Third Edit; John Wiley & Sons, Inc.; 2008.

# Primjena kolokacijske metode u numeričkoj analizi 2D područja općeg oblika s različitim rubnim uvjetima

Kozulić, V.<sup>1</sup> i Gotovac, B.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu predstavljen je novi algoritam za rješavanje rubnih zadataka na područjima s općom geometrijom. Predloženi postupak kombinira kolokacijsku metodu i atomske bazne funkcije algebarskog tipa koje se nazivaju Fup funkcije. Ovaj izbor baznih funkcija osigurava glatku aproksimaciju rješenja na pravilnim mrežama.

Sve uvjetne jednadžbe koje se odnose na rub područja pišu se u kolokacijskim točkama koje se nalaze na poligonu upisanom unutar razmatranog područja. Poznata vrijednost rubnog uvjeta u točki na rubu područja zadovoljava se iz kolokacijske točke unutar područja na način da se Dirichlet-ov ili Neumann-ov rubni uvjet razvije u Taylorov red. Postupak postaje posebno učinkovit u kombinaciji s Rvačevljevom teorijom R-funkcija koja predstavlja moćni alat za opisivanje geometrije promatranog područja.

Numeričkim primjerima pokazana je efikasnost i točnost predložene metode. Potvrđeni su očekivani nagibi konvergencijskih dijagrama numeričkih rješenja kao i njihovih derivacija.

**Ključne riječi:** rubni uvjeti, opća geometrija, kolokacijska metoda, atomske bazne funkcije

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Vedrana Kozulić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: vedrana.kozulic@gradst.hr

<sup>2</sup> **prof. emer. dr. sc. Blaž Gotovac**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za tehničku mehaniku, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: gotovac@gradst.hr

## 1 Uvod

Najčešće korištene mrežne metode koriste mreže za približno opisivanje geometrijskog oblika modela i uvode konačni broj čvorova za zadavanje rubnih uvjeta. Bezmrežne metode također mogu koristiti prostorne mreže za konstruiranje baznih funkcija i izvođenje numeričkih proračuna ali takve mreže se ne moraju podudarati s geometrijom modela. Kod korištenja bezmrežnih metoda poseban izazov predstavlja tretiranje rubnih uvjeta [1].

Cilj je razviti metodu za rješavanje rubnih problema na područjima općih oblika koja je efikasna i jednostavna za primjenu, koja omogućava točno zadovoljavanje svih rubnih uvjeta, i s kojom možemo postići glatka rješenja.

Kolokacijska metoda je posebno jednostavna za primjenu jer ne zahtijeva generiranje mreže i numeričku integraciju bez obzira na geometrijski oblik područja. Važno je samo osigurati da bazne funkcije budu dovoljno glatke kako bi se uvele u diferencijalnu jednadžbu problema koja se zadovoljava u kolokacijskim točkama. Postoji dobro razvijena WEB-spline metoda za višedimenzionalna područja proizvoljnog oblika koja je zasnovana na kolokacijskoj metodi i B-splineovima kao baznim funkcijama [2]. Međutim, i dalje ostaje problem kako uključiti mješovite rubne uvjete kod rubnih problema s općom geometrijom. Jedna od mogućnosti je numerički postupak koji kombinira metodu strukture rješenja i kolokacijsku tehniku [3] a omogućava točno zadovoljavanje svih zadanih rubnih uvjeta u svim točkama na rubu područja. Unatoč svim prednostima, ovim postupkom se ipak ne postiže očekivani nivo točnosti i brzina konvergencije na svim nepravilnim domenama. Stoga je potreban daljnji rad na razvoju novih algoritama za rješavanje rubnih problema na područjima općeg oblika.

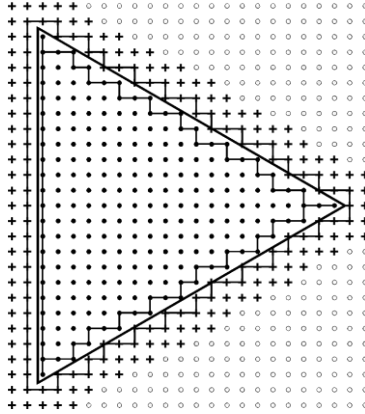
## 2 Novi algoritam za rješavanje rubnih problema na općim područjima

Osnovna ideja je koristiti sve najbolje karakteristike postojećih numeričkih metoda: pravilna mreža kao u diferencijskom postupku, finitne bazne funkcije kao u metodi konačnih elemenata, razmatranje dijelova ruba područja za opisivanje rubnih uvjeta kao u metodi rubnih elemenata, opisivanje geometrije područja jednom funkcijom u zatvorenom obliku kao u metodi R-funkcija, opisivanje singulariteta (lomova ruba područja) kao u analitičkim postupcima.

Predloženi algoritam kombinira kolokacijsku metodu i atomske bazne funkcije algebarskog tipa  $F_{up_n}(x)$  [4], [5] te za točno opisivanje geometrije promatranog područja koristi Rvačevljevu teoriju R-funkcija [6]. Atomske bazne funkcije su beskonačno derivabilne funkcije s kompaktnim nosačem. Indeks  $n$  označava najveći stupanj polinoma koji se može točno izraziti u obliku linearne kombinacije  $F_{up_n}(x)$  baznih funkcija. Ako odaberemo  $F_{up_2}$  funkciju za 2D područje, bazna funkcija ima 4 karakteristična intervala po svakom koordinatnom smjeru.

Zadano područje ograničava se upisanim stepenastim poligonom, vidjeti sliku 1. Čvorovi na toj liniji koriste se za zadavanje rubnih uvjeta na rubovima područja. Unutar tog poligona i na njegovom rubu rješava se fizikalna komponenta problema (npr. diferencijalna jednadžba).

Označeni čvorovi na slici 1. prikazuju središta nosača unutrašnjih i vanjskih baznih funkcija. Unutrašnje bazne funkcije (puni kružići) imaju veliki dio svog nosača ili cijeli nosač unutar domene. Vanjske bazne funkcije (križići) su u blizini granice s nosačem koji je dijelom unutar domene a dijelom izvan domene. Kako bi aproksimacija  $F_{up}$  funkcijama bila kompletna, trebaju se zadržati sve vanjske funkcije u bazi a za svaku od njih napisati uvjetnu jednadžbu. Prazni kružići označavaju  $F_{up}$  funkcije koje ne sudjeluju u sustavu jer im nosač ne ulazi u razmatranu domenu.



Slika 1. Raspored baznih funkcija za proračun; upisani i opisani stepenasti poligon

Središta nosača odnosno tjemena unutrašnjih baznih funkcija koriste se kao kolokacijske točke. U ovim točkama zadovoljava se diferencijalna jednadžba problema. Rubni uvjeti zadaju se u čvorovima na upisanom poligonu. Dakle, ovi čvorovi su višestruke kolokacijske točke i u svakom pojedinom čvoru uvjetna jednadžba se prikazuje formulom za razvoj funkcije u Taylorov red:

$$u(x + d_x, y + d_y) = u(x, y) + \frac{d}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \right) \cdot u(x, y) + \frac{d^2}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \right)^2 \cdot u(x, y) + \frac{d^3}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \right)^3 \cdot u(x, y) + \frac{d^4}{4!} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \right)^4 \cdot u(x, y) + \dots \quad (1)$$

gdje  $u(x + d_x, y + d_y)$  označava vrijednost funkcije rješenja u točki na rubu područja,  $u(x, y)$  je vrijednost funkcije rješenja u kolokacijskoj točki,  $d$  je udaljenost tih dviju točaka a  $n_x$  i  $n_y$  su komponente vanjske normale povučene iz kolokacijske točke prema granici područja.

Za odabrane bazne funkcije, sve derivacije reda iznad dva po pojedinom smjeru imaju vrijednost jednaku nula u izrazu (1). Tako Dirichlet-ov rubni uvjet ima sljedeći oblik:

$$u + \frac{d}{1!} \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) + \frac{d^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} n_y^2 \right) + \frac{d^3}{3!} \left( 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} n_x^2 n_y + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} n_x n_y^2 \right) + \frac{d^4}{4!} \left( 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} n_x^2 n_y^2 \right) = \alpha|_r \quad (2)$$

Uvjetna jednadžba (2) na lijevoj strani ima linearnu kombinaciju koeficijenata rješenja i derivacija baznih funkcija, a na desnoj strani je vrijednost zadanog rubnog uvjeta u točki presjeka stranice područja i pravca normale na tu stranicu povučene iz čvora na upisanom poligonu.

Ako je zadan Neumannov rubni uvjet, tada se funkcija derivacije rješenja po pravcu normale na stranicu područja razvija u Taylorov red:

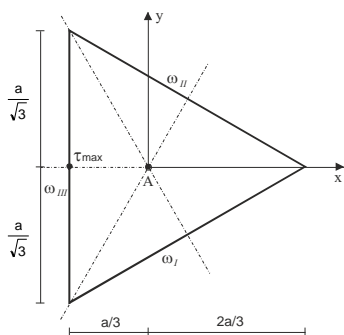
$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) + \frac{d}{d!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} n_y^2 \right) + \frac{d^2}{2!} \left( 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} n_x^2 n_y + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} n_x n_y^2 \right) + \frac{d^3}{3!} \left( 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} n_x^2 n_y^2 \right) = \beta_n \Big|_{\Gamma} \quad (3)$$

Oko upisanog stepenastog poligona u području nalazi se opisani stepenasti poligon izvan područja, vidjeti sliku 1. U tim čvorovima pišu se dodatne jednadžbe iz poznatih uvjeta na granici područja također u obliku razvoja u Taylorov red. Na taj način postiže se potreban broj uvjetnih jednadžbi potrebnih za određivanje svih koeficijenata linearne kombinacije baznih funkcija.

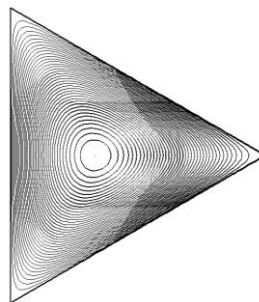
### 3 Numerički primjeri

#### 3.1 Problem torzije prizmatičnog štapa trokutastog poprečnog presjeka

Opisana metoda je primijenjena na problem torzije štapa s oblikom presjeka kao na slici 2.



Slika 2. Geometrija područja



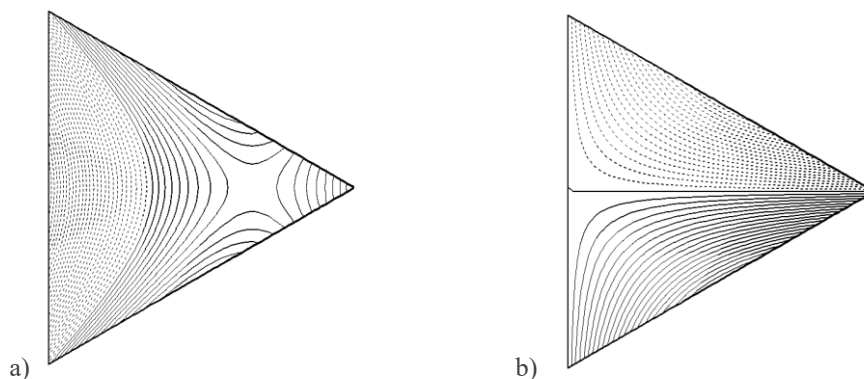
Slika 3. Izolinije funkcije napreznja  $u(x,y)$

Ovo je rubni problem opisan Poisson-ovom jednadžbom i homogenim Dirichlet-ovim rubnim uvjetima:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -2G\vartheta; \quad u(x,y) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

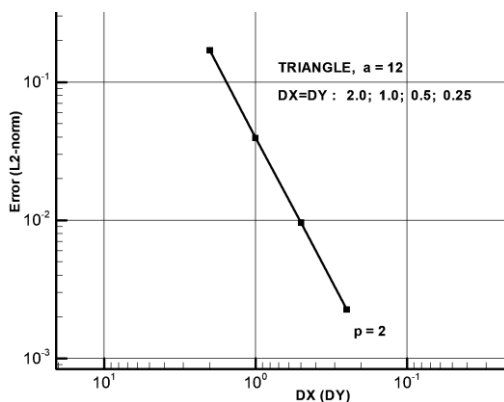
Komponente posmičnog napreznja u poprečnom presjeku štapa određuju se kao prve derivacije funkcije napreznja:  $\tau_{xz} = \partial u / \partial y$ ,  $\tau_{yz} = -\partial u / \partial x$ . Za ovakav oblik područja poznato je točno rješenje funkcije  $u(x,y)$  te vrijednost torzijske krutosti poprečnog presjeka.

Na slici 3. prikazane su izolinije funkcije napreznja dobivene predloženom metodom, a na slici 4. izolinije komponentata posmičnog napreznja.



Slika 4. Izolinije komponenta posmičnih napreznja: a)  $\tau_{yz}$ ; b)  $\tau_{xz}$

Slika 5. prikazuje dijagram konvergencije vrijednosti torzijske krutosti presjeka. Može se uočiti da je postignut očekivani nagib konvergencije koji za ovaj tip problema iznosi  $p = 2$ .



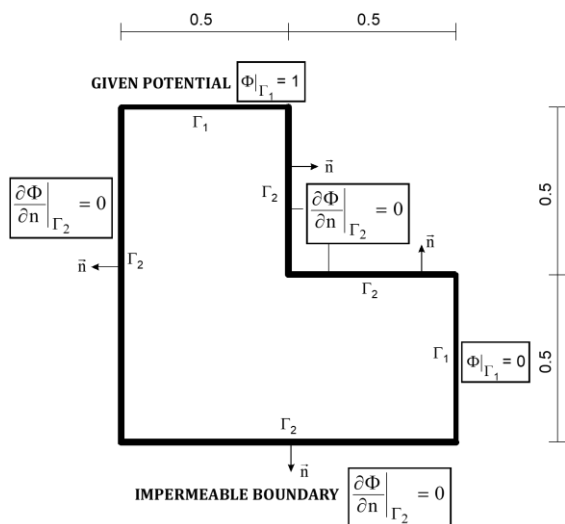
Slika 5. Dijagram konvergencije vrijednosti torzijske krutosti poprečnog presjeka

### 3.2 Filtracija nestlačive tekućine kroz poroznu sredinu

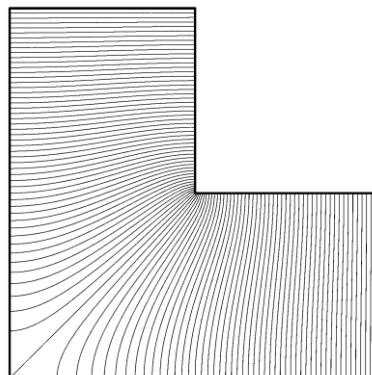
Ovdje se razmatra problem filtracije nestlačive tekućine kroz poroznu sredinu. Promatra se područje L-oblika. Problem je opisan Laplace-ovom diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

i mješovitim rubnim uvjetima prema slici 6. Na dijelu granice  $\Gamma_1$  zadani su Dirichletovi rubni uvjeti tj. vrijednosti funkcije potencijala  $\Phi$ , a na dijelu granice  $\Gamma_2$  koja je nepropusna zadovoljavaju se homogeni Neumannovi rubni uvjeti. Slika 7. prikazuje numeričko rješenje.



Slika 6. Geometrija područja i rubni uvjeti



Slika 7. Linije jednakog potencijala

## 4 Zaključak

Numerički primjeri pokazuju efikasnost novog algoritma: kolokacijska metoda omogućava jednostavnu primjenu jer nema generiranja mreže i numeričke integracije; atomske Fup bazne funkcije osiguravaju točnost aproksimacije i glatkost numeričkog rješenja; korištenje R-funkcija omogućava točno opisivanje geometrije područja te pisanje jednadžbi koje zadovoljavaju Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet pomoću razvoja u Taylorov red. Potvrđena je očekivana brzina konvergencije numeričkog rješenja kao i njegovih derivacija.

## Literatura

- [1] Gunter, F. C. i Liu, W.K.; Implementation of boundary conditions for meshless methods; Comput. Methods Appl. Mech. Eng.; 1998; 163; 205-230.
- [2] Höllig, K., Reif, U. i Wipper, J.; Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems; SIAM J. Numer. Anal.; 2001; 39(2); 442-462.
- [3] Kozulić, V. i Gotovac, B.; Application of the Solution Structure Method in Numerically Solving Poisson's Equation on the Basis of Atomic Functions; Int. J. Comput. Methods; 2018; 15(5); 1-25.
- [4] Gotovac, B. i Kozulić, V.; On a selection of basis functions in numerical analyses of engineering problems; Int. J. Eng. Model.; 1999; 12(1-4); 25-41.
- [5] Kozulić, V. i Gotovac, B.; Elasto-Plastic Analysis of Structural Problems Using Atomic Basis Functions; Computer modeling in engineering & sciences; 2011; 80(3-4); 251-274.
- [6] Rvachev, V.L.; Theory of R-functions and Some Applications; Naukova Dumka; Kiev; 1982.



# Linearna analiza zakrivljenog H-profila s dvije osi simetrije

Kustura, D.<sup>1</sup>, Vlak, F.<sup>2</sup>, Matić, T.<sup>3</sup> i Vukasović, M.<sup>4</sup>

## Sažetak

U ovom je radu provedena statička analiza pomaka i obodnog normalnog naprezanja tankostjenog zakrivljenog izotropnog štapa čiji je poprečni presjek H-profil s dvije osi simetrije, a koji je opterećen izvan ravnine zakrivljenosti s jednoliko raspodijeljenim momentom uvijanja po jedinici duljine. Analiza je provedena s pomoću dva analitička postupka koji su uspoređeni s rezultatima numeričke analize upotrebom metode konačnih elemenata korištenjem ljuskastih konačnih elemenata. Prvi analitički postupak je klasični Vlasovljev model tankostjenog štapa male zakrivljenosti, a drugi postupak je predložen od strane autora ovog rada i može se primijeniti u analizi tankostjenih štapova male i srednje zakrivljenosti.

**Ključne riječi:** tankostjeni zakrivljeni štap, H-profil s dvije osi simetrije, statička analiza, opterećenje izvan ravnine zakrivljenosti, jednoliko raspodijeljeni moment uvijanja

---

<sup>1</sup> **Dražen Kustura, mag. ing. mech.** Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, e-mail: dkustura@pmfst.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Frane Vlak,** Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: fvlak@fesb.hr

<sup>3</sup> **izv. prof. dr. sc. Tomislav Matić,** Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, e-mail: tmatić@pmfst.hr

<sup>4</sup> **doc. dr. sc. Marko Vukasović,** Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: mvukasov@fesb.hr

## 1 Uvod

Tankostjeni zakrivljeni štapovi konstrukcijski su elementi korišteni u različitim grana industrije [1]. U ovom se radu pod pojmom zakrivljenog štapa podrazumijeva izotropni lučni nosač tankostjenog poprečnog presjeka čija je nedeformirana težišna linija kružni luk polumjera  $R$ . Spregnutost pomaka i unutarnjih sila, složene veze unutarnja sila – pomak, te utjecaj oblika poprečnog presjeka na izraz za uzdužnu (obodnu) deformaciju neke su od značajki strukturne analize zakrivljenih štapova koje se ne pojavljuju u analizi ravnih tankostjenih štapova. Prema [2-4], izraz za obodni pomak H-profila s dvije osi simetrije se razlikuje od izraza za obodni pomak I-profila s dvije osi simetrije, a slijedom čega se također razlikuju i temeljni izrazi uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti. Prema saznanjima autora, razlika u izrazima za obodni pomak između I- i H-profila s dvije osi simetrije zanemarena je u većini istraživanja zakrivljenih štapova.

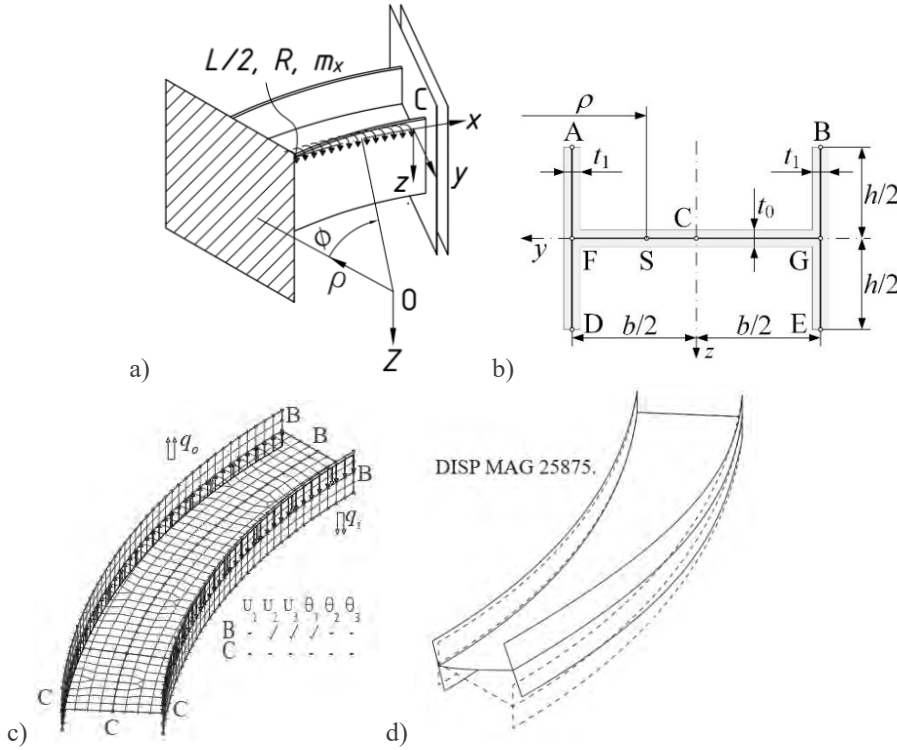
Iako složena, strukturna analiza zakrivljenih štapova može se pojednostavniti linearnim razvojem nelinearnog člana, koji opisuje utjecaj zakrivljenosti težišne linije, u Maclaurinov red [2-4]. Moment izvitoperenja [5] je unutarnja sila koju je potrebno uzeti u obzir prilikom analize ravnih i zakrivljenih tankostjenih štapova. Prilikom analize zakrivljenih H-profila s dvije osi simetrije koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti, u radovima [2-3] je moment izvitoperenja uzet u obzir, dok je u radu [4] zanemaren. Za razliku od [2], gdje je utjecaj zakrivljenosti djelomično pojednostavljen te se koriste geometrijske karakteristike poprečnog presjeka ravnog i zakrivljenog štapa, u [3] je utjecaj zakrivljenosti dosljedno pojednostavljen te se prilikom analize zakrivljenih štapova koriste isključivo geometrijske značajke poprečnog presjeka ravnog štapa.

Linearna statička analiza pomaka i obodnog normalnog naprezanja, na primjeru izotropnog zakrivljenog štapa čiji poprečni presjek je H-profil s dvije osi simetrije i koji je uklješten na oba kraja, je provedena u [3]. U tom radu su predložena analitička rješenja u zatvorenom obliku za slučaj djelovanja jednolikih opterećenja po jedinici duljine koja djeluju izvan ravnine zakrivljenosti. U ovom radu je taj model [3] ispitan na primjeru izotropnog zakrivljenog H-profila s dvije osi simetrije koji je uklješten na oba kraja i koji je opterećen momentom uvijanja po jedinici duljine težišne linije. Razmatrani model [3] uspoređen je s Vlasovljevim modelom štapa male zakrivljenosti [5], a također i s rezultatima dobivenim numeričkom analizom konačnim elementima, dobivenih primjenom ljuskastih konačnih elemenata s četiri čvora [6].

## 2 Komparativna analiza H-profila

Na slici 1.a shematski je prikazana polovica obostrano uklještenog štapa koji je opterećen jednolikim momentom uvijanja  $m_x$  po jedinici duljine težišne linije, gdje je simetrija na polovici raspona štapa uzeta u obzir. Na slici 1.a također su prikazani krivocrtni  $Cxyz$  i cilindrični  $O\rho\phi Z$  koordinatni sustavi korišteni u ovoj analizi, gdje točka C predstavlja težište poprečnog presjeka, točka O predstavlja središte zakrivljenosti nedeformirane težišne linije duljine  $L$ , a os  $x$  usmjerena je u smjeru prirasta kuta  $\phi$  te vrijedi  $x = R\phi$ . Na slici 1.b prikazana je srednja linija H-profila s dvije osi simetrije te njezine karakteristične točke, pri čemu su  $b$  i  $t_0$  duljina i debljina struka, a  $h$  i  $t$  visina i debljina pojasa. Na slici 1.c prikazan je numerički model istovjetno opterećenog H-

profila, kao i rubni uvjeti, pri čemu je simetrija štapa također uzeta u obzir, dok su na slici 1.d prikazani deformirani i nedeformirani (crtkana linija) numerički modeli razmatranog štapa.



Slika 1. Simetrična polovica uklještenog H-profila: a) shematski prikaz štapa opterećenog momentom uvijanja po jedinici duljine; b) značajke poprečnog presjeka [3]; c) rubni uvjeti numeričkog modela; d) deformirani i nedeformirani numerički model

Prilikom definiranja opterećenja kod numeričkog modela pokazanog na slici 1.c, koje mora biti istovjetno opterećenju pokazanom na slici 1.a, korištene su sile po jedinici duljine okomite na ravninu zakrivljenosti koje djeluju na spojevima pojasa i struka:  $q_i$  na unutarnjem pojasu i  $q_o$  na vanjskom pojasu. Kod zakrivljenog H-profila razlikuju se duljine unutarnjeg i vanjskog pojasa, zbog čega je potrebno modificirati iznose tih opterećenja. Geometrijskom analizom infinitezimalnog odsjeka zakrivljenog štapa slijedi:

$$q_i = \frac{m_x}{b} \frac{R}{R - b/2}$$

$$q_o = \frac{m_x}{b} \frac{R}{R + b/2}. \quad (1)$$

Zakrivljeni štap prelazi u ravni štap kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, a tada izraz (1) prelazi u istovjetna opterećenja ravnog štapa za koja vrijedi:  $\lim_{R \rightarrow \infty} q_i = \lim_{R \rightarrow \infty} q_o = m_x/b$ .

Usvojeni moduli elastičnosti i smicanja izotropnog štapa u ovoj analizi iznose  $E = 73$  GPa i  $G = 28$  GPa, odnosno geometrijske značajke poprečnog presjeka su  $b = 200$  mm,  $h = 100$  mm i  $t_0 = t_1 = 10$  mm [3]. Prosječne duljine stranica ljuskastih konačnih elemenata u svim

numeričkim modelima iznose deset milimetara, pri čemu je korišten lokalni koordinatni sustav za definiranje rubnih uvjeta i očitavanje rezultata, slika 1.c. Razmatrani su štapovi kod kojih za polumjer nedeformirane težišne linije vrijedi  $7h \leq R \leq 15h$ , odnosno kod kojih za duljinu težišne linije vrijedi  $10h \leq L \leq 20h$ , a provedena je analiza ograničena na srednju plohu zakrivljenog štapa.

U ovom radu su navedene i definirane fizikalne veličine neophodne za ovu analizu, dok je teoretski dio razmatranog problema detaljno opisan u [3]. Prema [2-5], pomaci proizvoljne točke S srednje linije u smjeru  $y$  i  $z$  osi,  $v$  i  $w$ , glase:

$$\begin{aligned} v &= v_C - z \alpha \\ w &= w_C + y \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

gdje je  $\alpha$  kut uvijanja konture poprečnog presjeka oko koordinatne osi  $x$ , a  $v_C$  i  $w_C$  su pomaci težišta C u smjeru koordinatnih osi  $y$  i  $z$ . Relativne pogreške razmatranog modela [3] su označene indeksom LC i definirane su kao:

$$\begin{aligned} \delta w_C^{LC} &= 100(w_C^{LC}/w_C^{FEM} - 1) \\ \delta \alpha^{LC} &= 100(\alpha^{LC}/\alpha^{FEM} - 1) \\ \delta \sigma_\phi^{LC} &= 100(\sigma_\phi^{LC}/\sigma_\phi^{FEM} - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Relativne pogreške Vlasovljevog modela [5] su označene indeksom VL i definirane su kao:

$$\begin{aligned} \delta w_C^{VL} &= 100(w_C^{VL}/w_C^{FEM} - 1) \\ \delta \alpha^{VL} &= 100(\alpha^{VL}/\alpha^{FEM} - 1) \\ \delta \sigma_\phi^{VL} &= 100(\sigma_\phi^{VL}/\sigma_\phi^{FEM} - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

U izrazima (3) i (4) se indeks FEM odnosi na numeričke rezultate,  $\sigma_\phi$  je obodno normalno naprezanje, a  $\alpha^{FEM}$  slijedi iz horizontalnih pomaka točaka A, B, D i E te prve jednadžbe izraza (2). Radijalni pomak  $v_C$  je jednak nuli zato što poprečni presjek ima dvije osi simetrije, a opterećenje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti [2-5].

Za razmatrane parametre su relativne pogreške kuta uvijanja,  $\delta \alpha^{LC}$  i  $\delta \alpha^{VL}$ , na polovici raspona štapa,  $\phi = L/(2R)$ , manje od sedam posto (7 %), pri čemu razmatrani postupak [3] ima malo bolje procjene kuta uvijanja u odnosu na Vlasovljev model. Obodno normalno naprezanje razmatrano je u presjeku  $\phi = b/R$  (u odnosu na uklještenje) te se kod svih postupaka maksimalna vrijednost obodnog normalnog naprezanja pojavljuje u rubnim točkama B i E vanjskog pojasa, slika 1.b. Ovo naprezanje značajno se razlikuje od maksimalnog obodnog naprezanja u unutarnjem pojasu, točke A i D, pri čemu je raspodjela obodnog naprezanja po visini oba struka linearna. Prosječna relativna pogreška maksimalnog obodnog naprezanja je kod razmatranog postupka [3] približno jednaka jedan posto, dok kod Vlasovljevog modela zakrivljenog štapa [5] približno iznosi tri posto.

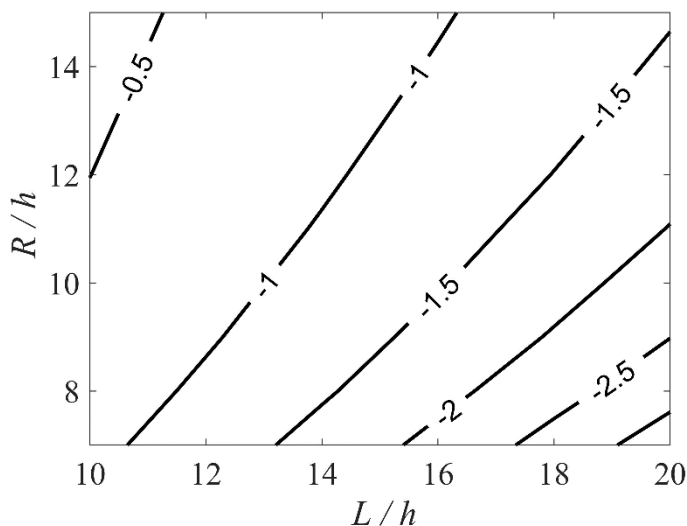
U tablici 1 prikazane su relativne pogreške progiba  $w_C$  na polovici raspona štapa,  $\delta w_C^{LC}$  i  $\delta w_C^{VL}$ , za različite duljine i polumjere zakrivljenosti štapa koji su definirani odnosima  $L/R$  i  $R/b$ .

Tablica 1. Relativne pogreške progiba,  $\delta w_C^{LC}$  i  $\delta w_C^{VL}$ , na polovici raspona štapa

	$R/b=8$			$R/b=10$			$R/b=12$		
$L/R$	10	15	20	10	15	20	10	15	20
LC [3]	2.14	-5.98	-7.63	5.69	-2.74	-4.28	7.68	-1.02	-2.47
VL [5]	-13.35	-12.79	-11.23	-10.41	-10.04	-8.3	-8.73	-8.57	-6.72

Iz tablice 1 se vidi da su procjene progiba na polovici raspona štapa kod modela predloženog u [3] malo bolje od tih istih procjena dobivenih Vlasovljevim modelom [5]. Kod manjih polumjera Vlasovljeva relativna pogreška progiba je malo veća od deset posto. Analizom slike 1.b te pomoću izraza (2), poprečni pomaci  $v$  i  $w$  najveći su u rubnim točkama poprečnog presjeka (točke A, B, D i E).

Na slici 2 prikazana je bezdimenzionalna karakteristika  $2w_C^{FEM}/(\alpha^{FEM}b)$  koja predstavlja omjer vertikalnog progiba težišta  $w_C^{FEM}$  u odnosu na najveći vertikalni pomak izračunat temeljem kuta uvijanja krute konture poprečnog presjeka  $\alpha^{FEM}$ , za sve numeričke modele na polovici raspona štapa.



Slika 2. Odnos  $2w_C^{FEM}/(\alpha^{FEM}b)$  na polovici raspona štapa

Odnos  $2w_C^{FEM}/(\alpha^{FEM}b)$  raste s porastom duljine štapa, a smanjuje se s porastom polumjera štapa. Kod duljih štapova manjih polumjera progib težišne linije (pomak u smjeru osi  $z$ )  $w_C$  značajno doprinosi vertikalnim pomacima ostalih točaka poprečnog presjeka  $w$ , iako je štap opterećen isključivo jednoliko raspodijeljenim momentom uvijanja. Kod ravnih štapova, vertikalni pomaci težišne linije  $w_C$  kod istog opterećenja su jednaki nuli, a ova činjenica govori u prilog tome da je strukturna analiza zakrivljenih štapova znatno složenija od analize ravnih štapova.

### 3 Zaključak

Razlike u procjenama obodnog normalnog naprezanja i kuta uvijanja, između Vlasovljevog modela štapa male zakrivljenosti [5] i razmatranog modela [3], neznatne su, a relativne pogreške oba postupka prihvatljive (relativne pogreške razmatranog modela su malo manje). Kod duljih štapova manjih polumjera je udio progiba u vertikalnim pomacima poprečnog presjeka značajan, pri čemu su relativne pogreške progiba razmatranog postupka manje od dva do četiri puta od tih

istih Vlasovljevih relativnih pogreški. Kao što je pokazano u [3] na primjeru štapa opterećenog s jednoliko raspodijeljenim silama koje su okomite na ravninu zakrivljenosti, odnosno u ovom radu na primjeru štapa opterećenog jednoliko raspodijeljenim momentom uvijanja, pri analizi štapova srednje zakrivljenosti ( $10 > b/R \geq 7$ ) potrebno je dosljedno uzeti u obzir utjecaj zakrivljenosti težišne linije. U Vlasovljevom modelu utjecaj zakrivljenosti značajno je pojednostavljen i zato je primjena tog postupka prikladnija pri analizi štapova male zakrivljenosti ( $b/R \geq 10$ ), za koje je taj postupak i namijenjen.

## Literatura

- [1] Yanze, L. i dr.; “Theoretical and experimental analysis of thin-walled curved rectangular box beam under in-plane bending“; Scanning; 2021; 1-19.
- [2] Tong, G. i Xu, Q.; “An Exact Theory for Curved Beams with Any Thin-Walled Open Sections“; Advances in Structural Engineering; 5; 4; 195 -209; 2002.
- [3] Kustura D.; Vlak F.; Matić T. i Vukasović M.; “The Out-of-plane Static Analysis of Thin-walled Curved H Beams“; Transactions of FAMENA, u postupku objave
- [4] Yang, Y. i Kuo, S.; “Static Stability of Curved Thin-Walled Beams“; Journal of Engineering Mechanics; 1986; 112; 8; 821-841.
- [5] Vlasov, V. Z.; “Thin-Walled Elastic Beams, Second Edition“; 1963; Israel Program for Scientific Translations; Jeruzalem.
- [6] ADINA 9.3.3. Theory and Modeling Guide, ADINA R&D Inc, Watertown, 2017.

# Algoritam metode faznog polja s provjerom konvergencije pojedinog sloja

Lesičar, T.<sup>1</sup>

## Sažetak

U radu je prikazan algoritam metode faznog polja s odvojenim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi za modeliranje oštećenja u materijalima. Izvedene su osnovne jednadžbe metode faznog polja, uz primjenu dekompozicije gustoće energije deformiranja. Algoritam je ugrađen u metodu konačnih elemenata te je objašnjen način prenošenja varijabli između slojeva konačnih elemenata, pri čemu se prije prijenosa varijabli provjerava konvergencija pojedinog sloja. Predložen je kriterij za provjeru konvergencije sloja faznog polja, temeljen na provjeri norme varijable faznog polja. Algoritam je ugrađen u programski paket ABAQUS putem korisničkih rutina. Učinkovitost predloženog postupka je testirana na uobičajenim numeričkim primjerima i usporedbom vremena računanja s RCTRL algoritmom metode faznog polja.

**Ključne riječi:** metoda faznog polja, oštećenje, metoda konačnih elemenata, odvojeni način rješavanja, krhki lom, duktilni lom

---

<sup>1</sup> **doc. dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomlslav.lesicar@fsb.hr

## 1 Uvod

Moderne inženjerske konstrukcije, kao i materijali u inženjerstvu postaju sve kompleksniji, kako bi ispunili sve strože zahtjeve učinkovitosti, izdržljivosti, niskih troškova te ekološke prihvatljivosti. U tom pogledu, popuštanje materijala predstavlja jedan od najvažnijih faktora u postupku dizajniranja, kako bi se spriječio lom konstrukcije, koji u konačnici može dovesti do katastrofalnih posljedica. Numeričke simulacije predstavljaju neizostavni dio dizajniranja konstrukcijskih komponenata, gdje nadopunjuju eksperimentalna ispitivanja.

Među brojnim numeričkim postupcima, metoda konačnih elemenata je jedan od najučestalijih pristupa za modeliranje konstitutivnog ponašanja materijala i konstrukcija. U numeričkom modeliranju oštećenja, razlikuju se diskretne i difuzivne metode. U diskretnim metodama, pukotina je ugrađena kao geometrijski diskontinuitet. Među najpopularnijim pristupima diskretnog modeliranja oštećenja su kohezivno modeliranje [1] i proširena metoda konačnih elemenata [2]. S druge strane, difuzivni pristupi modeliranja oštećenja uvode parametar oštećenja koji kontrolira krutost materijala. Jedan od najvećih problema difuzivnih pristupa je ovisnost numeričkih rezultata o gustoći diskretizacije, kao i usmjerenosti mreže, što nažalost dovodi do gubitka objektivnosti rezultata i pojave nefizikalnih rješenja [3].

Protokih godina metoda faznog polja je postala vrlo popularna za modeliranje oštećenja. Metoda faznog polja pripada difuznim metodama, odnosno, prijelaz materijala iz neoštećenog stanja u potpuni slom je opisan na difuzni način pomoću posebne varijable faznog polja. Primjena metode faznog polja u problemima popuštanja materijala je matematički formulirana kao problem minimiziranja energije, uz primjenu Griffithove teorije loma u poopćenom smislu. Jedna od najvećih prednosti metode faznog polja je općenitost matematičkog modela, gdje nisu potrebni posebni *ad hoc* kriteriji iniciranja ili rasta pukotine. Na taj način metoda faznog polja može riješiti kompleksne probleme popuštanja materijala, koji uključuju krivocrtne pukotine, grananje te neovisnost rasta pukotine o diskretizaciji. Iz tog razloga danas postoje brojni pristupi metode faznog polja [4,5].

## 2 Metoda faznog polja

Kao što je spomenuto, u metodi faznog polja proces popuštanja materijala je definiran kao problem minimiziranja funkcionala  $\psi$ , prikazanog u ovisnosti o tenzoru deformacije  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Za tijelo  $\Omega$  s pukotinom površine  $\Gamma$ , funkcional je moguće podijeliti na dio koji pripada kompaktnom dijelu tijela  $\psi^b$  i disipiranu energiju utrošenu na stvaranje površine pukotine  $\psi^s$ :

$$\psi = \psi^b + \psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma. \quad (1)$$

U jednadžbi (1),  $G_c$  je kritična gustoća energije deformiranja, koja ovisi o materijalu. Površina pukotine je opisana funkcijom gustoće pukotine  $\gamma(\boldsymbol{\phi}, \nabla \boldsymbol{\phi})$ , ovisnoj o varijabli faznog polja  $\boldsymbol{\phi}$ . Za neoštećeni materijal vrijedi ( $\boldsymbol{\phi} = 0$ ), a za potpuno oštećenje ( $\boldsymbol{\phi} = 1$ ). Funkcija gustoće pukotine najčešće ima oblik



$$\gamma_{\text{AT-2}}(\phi, \nabla \phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\phi^2}{l} + l |\nabla \phi|^2 \right), \quad \gamma_{\text{TH}}(\phi, \nabla \phi) = \frac{3}{8\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{l} 2\phi + l |\nabla \phi|^2 \right], \quad (2)$$

prema [6], pri čemu  $l$  predstavlja širinu difuzivne zone. Nakon pojave oštećenja dolazi do smanjenja krutosti materijala, što je u metodi faznog polja opisano smanjenjem funkcionala kompaktnog dijela tijela pomoću degradacijske funkcije  $g(\phi) = (1 - \phi)^2$  na način

$$\psi^b = \int_{\Omega/\Gamma} g(\phi) \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega. \quad (3)$$

Za razmatranje elastoplastičnog ponašanja materijala prije konačnog loma, funkcional kompaktnog dijela tijela ovisi o elastičnoj ( $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ) i plastičnoj deformaciji ( $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ )

$$\psi^b = \int_{\Omega/\Gamma} g(\phi) (\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi_p(\boldsymbol{\varepsilon}^p)) d\Omega. \quad (4)$$

Kako bi se osigurala fizikalna konzistentost, u literaturi je predložena dekompozicija funkcionala kompaktnog dijela tijela na pozitivni ( $\psi^+$ ) i negativni dio ( $\psi^-$ ), pri čemu degradacijska funkcija djeluje samo na pozitivni dio [7], što osigurava da pukotina raste samo u vlačno opterećenom dijelu tijela. Na taj način, funkcional kompaktnog dijela tijela glasi

$$\psi^b(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \phi) = \int_{\Omega} [g(\phi) \psi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi_e^-(\boldsymbol{\varepsilon}^e)] d\Omega + \int_{\Omega} g(\phi) \psi_p(\boldsymbol{\varepsilon}^p) d\Omega. \quad (5)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (5) u (1), nakon duljeg matematičkog postupka opisanog u [5] slijedi sustav jednadžbi u metodi faznog polja s odgovarajućim rubnim uvjetima

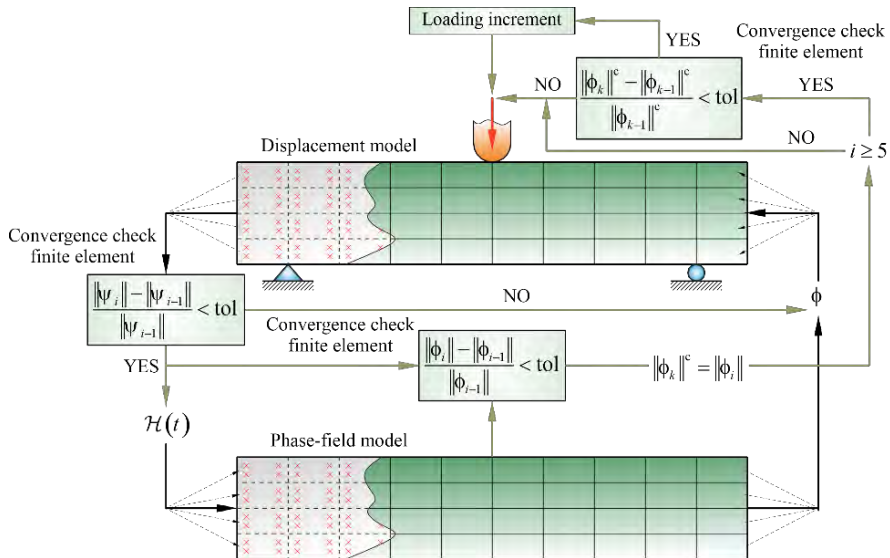
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ u } \Omega, & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \text{ na } \partial\Omega_t, \\ -l^2 \Delta \phi + [1 + H] \phi &= H \text{ u } \Omega, & \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ na } \partial\Omega_{\bar{\mathbf{u}}}, \\ \mathbf{H}(t) &= \max_{\tau \in [0, t]} \left( \frac{2\psi^+ l}{G_c} \right), & \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

U jednadžbama (6),  $\mathbf{u}$  je vektor pomaka,  $\mathbf{b}$  je vektor volumenskog opterećenja,  $\mathbf{t}$  je vektor površinskog opterećenja,  $\mathbf{n}$  predstavlja normalu, a  $\boldsymbol{\sigma}$  je Cauchyev tenzor naprezanja. Uz to, u jednadžbama (6) je uveden i parametar povijesti opterećenja  $\mathbf{H}$ , koji osigurava nefizikalno zarašćivanje pukotine.

### 3 Numerička implementacija

Detalji ugradnje metode faznog polja u metodu konačnih elemenata su detaljno prikazani u [8]. Međutim, funkcional nije konveksan s obzirom na polje pomaka i varijablu faznog polja prilikom simultanog (monolitičkog) rješavanja sustava jednadžbi, što uzrokuje poteškoće u dobivanju

fizikalnih numeričkih rezultata i postizanja konvergencije u numeričkim simulacijama [9]. Konveksnost je moguće osigurati odvojenim rješavanjem pripadnih diferencijalnih jednadžbi u dva sloja konačnih elemenata [10]. U ovom radu je predložen algoritam metode faznog polja s dva sloja konačnih elemenata, koji prijenos varijabli između slojeva radi nakon provjere konvergencije u prvom sloju (Convergence Check Phase-Field, CCPF). Algoritam je ugrađen u programski paket ABAQUS, a shema algoritma je prikazana na slici 1.

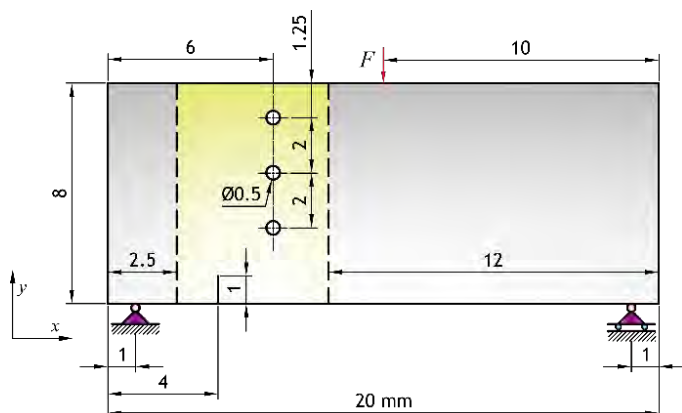


Slika 1. Shema algoritma

Prvi sloj se sastoji od konačnih elemenata iz ABAQUS biblioteke, dok su materijalni model i funkcional ugrađeni u korisničku rutinu UMAT. Drugi sloj čine konačni elementi metode faznog polja ugrađeni u korisničku rutinu UEL. Osim ABAQUS alata za definiranje konvergencije, za provjeru konvergencije pojedinog sloja, izveden je korisnički konačni element za dodatnu provjeru konvergencije na temelju norme funkcionala i varijable faznog polja (Convergence Check Finite Element, CCFE). Pomoću CCFE je osigurano da se parametar povijesti opterećenja ne prenosi u drugi sloj prije konvergencije prvog sloja. Osim toga, CCFE provjerava konvergenciju varijable faznog polja prilikom rasta pukotine, odnosno, da li je kroz iterativni postupak potrebno računati rast pukotine. Više detalja o CCPF algoritmu je prikazano u [11].

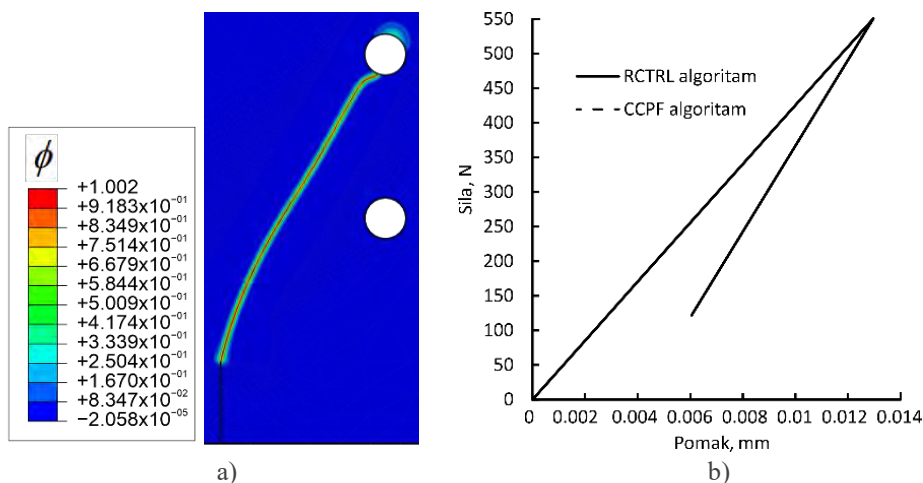
## 4 Numerički primjer

Učinkovitost i točnost predloženog algoritma je testirana na standardnom problemu asimetričnog savijanja u tri točke, za koji postoji eksperimentalno ispitivanje [12]. Materijal uzorka je pleksiglas, modula elastičnosti  $E = 20,8 \text{ GPa}$ , s Poissonovim faktorom  $\nu = 0,3$ . Parametri faznog polja su  $G_c = 1 \text{ N/mm}$  i  $l = 0,025 \text{ mm}$ . Dimenzije uzorka i rubni uvjeti su prikazani na slici 2.



Slika 2. Geometrija uzorka i rubni uvjeti

Uzorak je opterećen silom iznosa  $F = 500 \text{ N}$  i diskretiziran s 321 154 četverokutnih konačnih elemenata, od čega se 320 601 element nalazi u žuto osjenčanoj zoni. Diskretizacija je preuzeta iz [8], gdje je predložen RCTRL algoritam metode faznog polja. Na slici 3 su prikazani dobiveni rezultati. Slika 3a prikazuje dobivenu pukotinu, čija je geometrija u skladu s eksperimentalnim ispitivanjem [12]. Nadalje, slika 3b prikazuje ovisnost sile o pomaku na mjestu opterećenja. Osim toga, numerički rezultati dobiveni CCPF shemom su uspoređeni s rezultatima dobivenim RCTRL algoritmom. Kao što je vidljivo, rezultati se u potpunosti preklapaju. Pošto su numerički modeli jednaki u oba algoritma, numeričke simulacije su provedene na istom računalu, kako bi se pokazala učinkovitost CCPF sheme. RCTRL algoritam je dovršio simulaciju za 24 384 sekundi (6,77 h), dok je CCPF algoritam završio analizu za 13 190 sekundi (3,66 h). Stoga se može zaključiti da je CCPF algoritam daje točno predviđanje pojave loma te je numerički efikasniji od RCTRL algoritma.



Slika 3. Asimetrično savijanje u tri točke: a) detalj geometrije pukotine, b) dijagram sila-pomak

## 5 Zaključak

U radu je izveden CCFE algoritam metode faznog polja s odvojenim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi te je opisana ugradnja u komercijalni programski paket ABAQUS. Objasnjeno je posebni CCFE konačni element koji provjerava konvergenciju pojedinog sloja konačnih elemenata i regulira prijenos varijabli između sloja. Osim toga CCFE provjerava da li je zadovoljena konvergencija varijable faznog polja i na taj način osigurava da je za zadani inkrement opterećenja osiguran potrebnii prirast oštećenja. Novopredloženi numerički postupak je provjeren na primjeru iz literature te je demonstrirana točnost numeričkih rezultata u usporedbi s eksperimentalnim ispitivanjem, kao i RCTRL algoritmom metode faznog polja. Usporedbom vremena računanja CCPF sheme s RCTRL algoritmom pokazano je da je CCPF algoritam numerički učinkovitiji.

### Literatura

- [1] Park, K. i Paulino, GH.; Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces; 2013; *Appl Mech Rev.*; 64(6).
- [2] Hettich, T.; Hund, A. i Ramm, E.; Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework; *Comput Methods Appl Mech Eng.*; 2008 Jan 1; 197(5); 414–24.
- [3] de Borst, R.; Sluys, LJ.; Muhlhaus, HB. i Pamin, J.; Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation; *Eng Comput.* 1993; 10(2); 99–121.
- [4] Dittmann, M.; Aldakheel, F.; Schulte, J.; Wriggers, P. i Hesch, C.; Variational phase-field formulation of non-linear ductile fracture; *Comput Methods Appl Mech Eng.* ; 2018; 342; 71–94.
- [5] Seleš, K.; Aldakheel, F.; Tonković, Z.; Sorić, J. i Wriggers, P.; A general phase-field model for fatigue failure in brittle and ductile solids; *Comput Mech.*; 2021; 67(5); 1431–52.
- [6] Alessi, R.; Ambati, M.; Gerasimov, T.; Vidoli, S. i De Lorenzis, L.; Comparison of Phase-Field Models of Fracture Coupled with Plasticity; In: Oñate, E., Peric, D., de Souza, Neto, E., Chiumenti, M., editors. *Advances in Computational Plasticity Computational Methods in Applied Sciences*. Springer, Cham; 2018.
- [7] Dijk, NP. van; Espadas-Escalante, JJ. i Isaksson, P.; Strain energy density decompositions in phase-field fracture theories for orthotropy and anisotropy; *Int J Solids Struct.*; 2020; 196–197; 140–53.
- [8] Seleš, K.; Lesičar, T.; Tonković, Z. i Sorić, J.; A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture.; *Eng Fract Mech.*; 2019; 205; 370–86.
- [9] Wick, T.; Modified Newton methods for solving fully monolithic phase-field quasi-static brittle fracture propagation; *Comput Methods Appl Mech Eng.*; 2017; 325; 577–611.
- [10] Molnár, G. i Gravouil, A.; 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture; *Finite Elem Anal Des.*; 2017; 130:27–38.
- [11] Lesičar, T.; Polančec, T. i Tonković, Z.; Convergence Check Phase-Field Scheme for Modelling of Brittle and Ductile Fractures; 13; *Applied Sciences*. 2023.
- [12] Ingraffea, A. i Grigoriu, M.; Probabilistic Fracture Mechanics: A Validation of Predictive Capability; 1990 Aug 1; 155.

# Ispitivanje akustičnih svojstava materijala mjerjenjem u impedancijskoj cijevi

Lozina, Ž.<sup>1</sup>, Šarac, J.<sup>2</sup> i Sedlar, D.<sup>3</sup>

## Sažetak

U ovom radu opisan je postupak ispitivanja akustičnih svojstava uzoraka materijala koji se koriste u brodograđevnoj industriji. Koristeći impedancijsku cijev sastavljenu od dva dijela između kojih se nalazi ispitivani uzorak i metodu transfer matrice, izračunat je transmisijski gubitak. Primjenjujući metodu opisanu u standardu ISO-717-1, određen je indeks redukcije zvuka kao jednobrojčana karakteristika zvučne izolacije materijala. Ispitana su tri postojeća uzorka plivajućeg poda i temeljne obloge te inovativni uzorak koji u sebi sadrži talog od kave u svrhu ponovne uporabe otpadnih materijala.

**Ključne riječi:** impedancijska cijev, indeks redukcije zvuka, transmisijski gubitak, akustična izolacija

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Željko Lozina**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: lozina@fesb.hr

<sup>2</sup> **Josipa Šarac, mag. phys.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: jljubas@fesb.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Damir Sedlar**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: dsedlar@fesb.hr

## 1 Opis problema i metode mjerenja

Smanjenje buke na brodovima postiže se korištenjem kompozitnih struktura za zvučnu izolaciju zidova i podova. Neki od materijala koji se koriste u plivajućim podovima imaju veliku gustoću, što rezultira značajnom ukupnom masom i smanjenjem učinkovitosti. Polazna ideja je bila kombinirati osnovne materijale različitih debljina kako bi se smanjila ukupna masa uz ista ili bolja akustična svojstva kompozita. Pomoću impedancijske cijevi moguće je odrediti normalnu komponentu transmisijskog koeficijenta, prema standardu ASTM E2611-17 [1].

Frekvencijski raspon koji se može obuhvatiti mjerenjem ovisi o geometriji cijevi. Sa dvije impedancijske cijevi i ukupno tri različita razmaka između mikrofona ispitani smo uzorke u frekvencijskom području od 45 do 3600 Hz. Određivanje transfer matrice zahtijeva mjerenje kompleksnog zvučnog tlaka na četiri lokacije, po dva sa svake strane uzorka. Pomoću njih se računa prijenosna funkcija između referentne lokacije i svakog mikrofona. Nakon što se izračunaju elementi prijenosne matrice, mogu se odrediti akustične karakteristike mjerenog uzorka:

$$t = \frac{2e^{jkd}}{T_{11} + (T_{12}/\rho c) + \rho c T_{21} + T_{22}} \quad (1)$$

$$TL_n = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{t} \right| \quad (2)$$

gdje su  $T_{ij}$  elementi transfer matrice,  $t$  transmisijski koeficijent,  $TL_n$  normalni transmisijski gubitak,  $k$  valni broj,  $d$  debljina uzorka,  $\rho$  gustoća zraka,  $c$  brzina zvuka.

Metoda dobivanja indeksa redukcije zvuka bazira se na usporedbi rezultata mjerenja s referentnom krivuljom sastavljenom od tri pravca različitih nagiba. Referentna krivulja se pomiče vertikalno u koracima od 1 dB sve dok suma nepoželjnih devijacija ne bude što veća, ali ne veća od 32 dB. Vrijednost referentne krivulje na 500 Hz nakon pomicanja predstavlja traženi indeks redukcije zvuka  $R_w$ . Rezultati ispitivanja prikazani su u tablici 1.

Tablica 1: indeks redukcije zvuka za postojeće kompozite (A, B C) i inovativni kompozit (D)

Uzorak	A	B	C	D
Indeks redukcije zvuka $R_w$ [dB]	55	53	55	49

### Zahvale

Ovaj članak je vezan uz projekt Centar kompetencija za naprednu mobilnost (CEKOM), reference: KK.01.2.2.03.0022. Nositelj projekta je DIV grupa d.o.o..

### Literatura

- [1] Standard Test Method for Normal Incidence Determination of Porous Material Acoustical Properties Based on the Transfer Matrix Method, ASTM E2611 – 19

# Raspregnut sustav neklasično prigušenog dinamičkog modela opterećenog silom ovisnom o položaju

Lozina, Ž.<sup>1</sup> i Sedlar, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

Prikazana je mogućnost modalne dekompozicije neklasično prigušenih sustava opterećenih silama ovisnim o položaju. Razmatran je pristup prostora stanja modalnoj dekompoziciji i utvrđeno je da uvodi fizikalne nejasnoće što ga čini manje praktičnim u inženjerskim primjenama. Alternativno, može se uvesti linearizirani sustav s ekvivalentnim odzivom kako bi se implementirala modalna analiza koja olakšava modalnu dekompoziciju i filtriranje modova krutog tijela kada je to potrebno. Međutim, postoje slučajevi kada filtriranje modova krutog tijela nije moguće zbog nelinearnosti povezanih s karakterom nelinearnih opterećenja. Ovo pitanje je dodatno ilustrirano u slučaju praktične primjene. Naveden je niz teorijskih primjera kako bi se pokazala pouzdanost postupka. Teorijski primjeri uključuju neklasično prigušene probleme sa i bez modova krutog tijela. Prijelazni problemi rješavaju se izravno i implementiraju predloženu modalnu analizu, modalnu dekompoziciju i filtriranje modova krutog tijela. Prikazana je i praktična primjena.

**Ključne riječi:** dinamički model, neklasično prigušenje, sila ovisna o položaju, raspregnut sustav

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Željko Lozina**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: zeljan.lozina@fesb.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Damir Sedlar**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: damir.sedlar@fesb.hr

## 1 Uvod

Modalna analiza i numerička modalna superpozicija često su povoljan pristup, ali obično ograničeni na linearne sustave, [1]. Pod nekim uvjetima ovi postupci ograničeni na linearne sustave mogu se učinkovito primijeniti na nelinearne. Važan poseban slučaj neklasičnog prigušenog sustava pobuđenog silom ovisnom o položaju razmatra se za postupak modalne superpozicije.

Prikazan je niz teorijskih primjera kako bi se ilustrirao postupak. Važna implementacija opterećenja izazvanog ledom neklasično prigušenog brodskog pogonskog sklopa odabrana je za primjer praktične primjene.

### 1.1 Tehnika raspresanja za neklasično prigušen sustav

Linearni dinamički modeli ravnaju se prema jednadžbama:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \quad (1)$$

gdje su  $\mathbf{M}$  matrica masa,  $\mathbf{D}$  matrica prigušenja,  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{q}$  vektor pomaka,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$  vektor sile kao funkcija vremena. Klasično prigušenje je u obliku:

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2)$$

i gdje su  $\alpha$  and  $\beta$  – skalarni koeficijent odabran kako bi odgovarao matrici prigušenja  $\mathbf{D}$ .

Neka su  $\Phi$  i  $\Lambda = [\omega_i^2]$  matrice svojstvenih vektora i pripadnih svojstvenih vrijednosti koji odgovaraju svojstvenoj zadaći neprigušenog sustava:  $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\phi = 0$ . Nadalje, neka se svojstveni vektori normaliziraju na matricu mase  $\mathbf{M}$ , odnosno, neka je  $\Phi^T\mathbf{M}\Phi = \mathbf{I}$ .

Tada, u modalnom prostoru, jednadžbe gibanja imaju oblik:

$$\ddot{r}_i + (\alpha + \beta\omega_i^2)\dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

gdje su:

$r_i$  – modalne koordinate i

$f_i$  – modalno opterećenje

definirani s:

$$\mathbf{r} = \Phi^{-1}\mathbf{q}$$

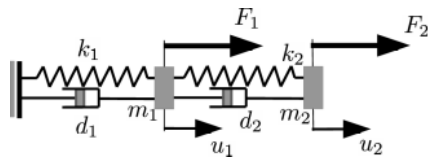
$$\mathbf{f} = \Phi^T\mathbf{Q}$$

U ovom specifičnom slučaju diferencijalne jednadžbe gibanja su rastavljene, a modovi krutog tijela i elastični modovi mogu se lako rastaviti i predstaviti zasebno.



## 2 Primjer

Analizira se jednostavni model s 2 stupnja slobode s nekласičnim prigušenjem, slika 1:



Slika 1. Jednostavni model s 2 stupnja slobode

Poznato:

$$m_1 = m_2 = m, m = 1 \text{ kg},$$

$$k_1 = k_2 = k, k = 1 \text{ N/m},$$

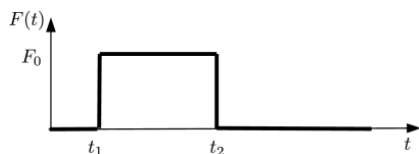
$$\alpha = 0.1, \beta = 0.001;$$

$$u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0 \text{ m}, u_2(0) = \dot{u}_2(0) = 0 \text{ m},$$

$$\dot{u}_1(0) = 0 \text{ m/s},$$

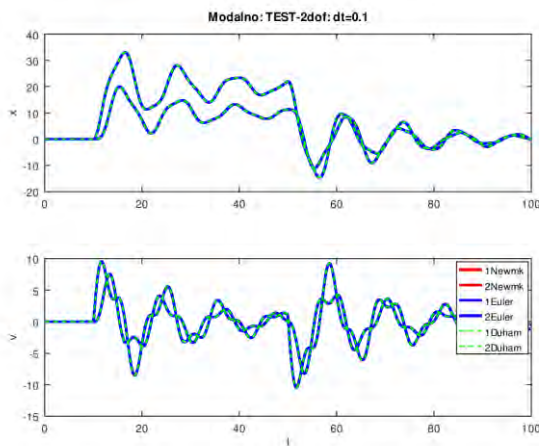
$$\dot{u}_2(0) = 0 \text{ m/s},$$

$$F_1 = 0 \text{ N}, F_2 = F(t):$$



```
t1=10; t2=50; F0=10;
Ft = zeros(2,1);
if(t>t1 && t<t2)
    Ft(2,1) = F0;
end
```

Grafički prikaz rezultata:

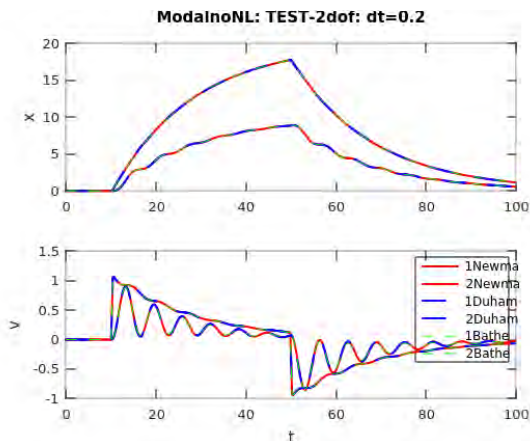


Slika 2. Rješenje za pomake za klasično prigušenje

Proširi li se prigušenje neklasičnom komponentom: ( $d_2 = 9$ ):

$$D_{NL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

dobiva se rješenje:



Slika 3. Rješenje pomaka za neklasično prigušenje

Prednost modalnog pristupa je u upravljanju frekvencijskim pojasom modela. To će se u potpunosti pokazati u slučaju s uključenim modovima krutog tijela. Međutim, karakter modalne jednadžbe poput moda krutog tijela s nultom frekvencijom mogao bi zahtijevati poseban numerički tretman.

### 3 Zaključak

Modalno odvajanje specifičnih nelinearnih sustava koji uključuju neklasično prigušenje i nelinearnu vanjsku silu uvjetovanu položajem razmatra se i rješava izravno i implementacijom tehnike modalne superpozicije. Detaljno se raspravlja o teoretskoj osnovi i pitanjima implementacije. Dokazano je da je moguće učinkovito primijeniti tehniku modalne superpozicije kako bi se zadržale prednosti modalne dekompozicije i još uvijek rješavale nelinearnosti. Nažalost, ne postoji opći postupak za bilo koju vrstu nelinearnog problema. Svaki slučaj zahtijeva pažljivo prilagođen postupak. Prikazani su teorijski i praktični primjeri primjene.

#### Literatura

- [1] Bathe, K.J.; Finite element procedures; 1996; Prentice-Hall, NJ.
- [2] Caughey, T.K. i Ma, F.; Complex modes and solvability of nonclassically damped linear systems; ASME Journal of Applied Mechanics; 1993; 60; 26–28.

# Analiza i optimizacija geometrije vjetrotunela u svrhu ispitivanja vjetroturbine

Marinić-Kragić, I.<sup>1</sup>, Milas, Z.<sup>2</sup> i Vučina, D.<sup>3</sup>

## Sažetak

U radu je prikazana numerička optimizacija geometrije vjetrotunela koji se nalazi u laboratoriju Katedre za numeričko modeliranje i primjenu računala FESBa. Namjena vjetrotunela je ispitivanje novih modela Savonius vjetroturbine (SWT).

U inicijalnom dizajnu, vjetrotunel se sastoji od mjerne sekcije  $1 \times 2.8 \text{ m}^2$ . Cilj je uvesti preinake u izvedbi vjetrotunela tako da se reduciraju gubici (pad tlaka) i korijen srednjeg kvadratnog odstupanja brzine (RMS) strujanja u mjernoj sekciji. Predmet optimizacije su lopatice na ulaznom i izlaznom dijelu vjetrotunela te sapnica i difuzor mjerne sekcije s reduciranom visinom i dulinom. Optimizacija je pokazala da skretne lopatice značajno smanjuju gubitke strujanje (pad tlaka) u vjetrotunelu, a kontrakcijom mjerne sekcije postiže se ujednačeniji profil brzine strujanja, odnosno RMS brzine. Nakon optimizacije, RMS u mjernoj sekciji iznosi 1,4%, zbog čega se u stvarnoj izvedbi dodaju ispravljači strujanja i mreže kako bi se dodatno smanjio RMS.

**Ključne riječi:** vjetrotunel, numerička optimizacija, Savonius vjetroturbina

---

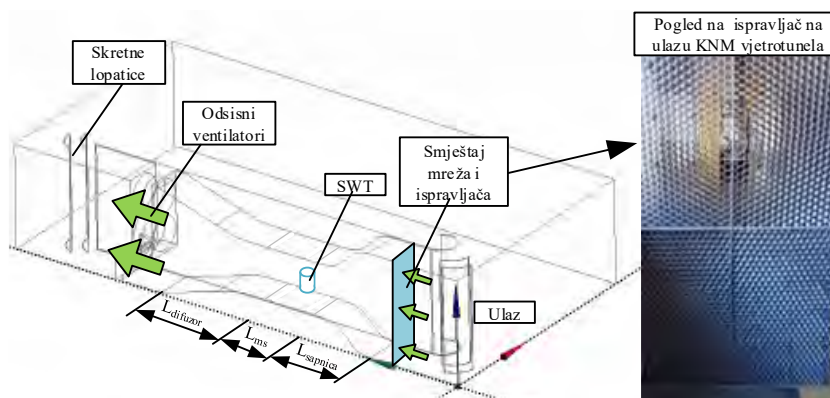
<sup>1</sup> **doc. dr. sc. Ivo Marinić-Kragić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: imarinic@fesb.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Zoran Milas**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: zmilas@fesb.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Damir Vučina**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: vucina@fesb.hr

## 1 Uvod

Planirani vjetrotunel Katedre za numeričko modeliranje i primjenu računala (KNM) je prvenstveno predviđen za ispitivanje značajki modela vjetroturbine s vertikalnim vratilom tipa Savonius (SWT), odnosno provjeri poboljšanja učinkovitosti postignute CFD optimizacijom oblika rotora turbine. U dosadašnjim istraživanjima su autori ovog rada, koristeći validirane 3D CFD modele turbulentnog nestacionarnog strujanja oko SWT i metode optimizacije, utvrdili mogućnost znatnog povećanja učinkovitosti-koeficijenta snage SWT promjenom oblika, položaja i broja lopatica kola zadržavajući pri tom njihovu jednostavnost za izradu [1]. Svrha razvoja ispitnog tunela je želja za eksperimentalnom provjerom rezultata numeričke simulacije rada SWT na preinačenom jednostavnom KNM tunelu s odsisnim ventilatorom i otvorenim povratom. Na ukupnoj ravnoj dionici postojećeg tunela duljine 8.3m, presjeka 2,8x1 m<sup>2</sup>, zamijenit će se dionica duljine 6.8 m sa: sapnicom, mjernom sekcijom duljine  $L_{ms}=1,5\text{m}$  i difuzorom, svi širine 1 m. Sapnica i difuzor su tzv. 2D izvedba u kojoj se simetrično spram osi tunela mijenja visina pravokutnog presjeka tunela (bez zakošavanja kutova presjeka) a sve u svrhu jednostavnosti preinake.



Slika 1. Prikaza vjetrotunela s označenim dijelom koji će se preinačiti i fotografija iz ulazne sekcije.

Primarni cilj optimizacije geometrije pri preinaci vjetrotunela je da se s relativno ograničenom kontrakcijom postojećeg tunela, ulaz –izlaz sapnice  $A_{ul}/A_{iz} \approx 2$  i posljedičnom povećanju brzine u zatvorenoj mjernoj sekciji na  $\approx 10$  m/s, ostvari vrlo mala neravnomjernost raspodjele brzine RMSv u (“praznoj”) mjernoj sekciji: 0,75% spram srednje brzine [2], 0,5% izvan graničnog sloja [3], te malo odstupanje smjera brzine spram normale poprečnog presjeka mjerne sekcije  $0,2^\circ$  [4]. Sekundarni cilj optimizacije je minimalni pad tlaka zbog dodatnog otpora strujanja uzrokovanog kontrakcijom tunela čemu najviše doprinosi difuzor koji se nastavlja na mjernu sekciju, slika 2.

Niska vrijednost RMSv predstavlja standard za velike istraživačke vjetrotunele i lako je ostvariva velikom kontrakcijom sapnice. Njihovi veliki presjeci zatvorene mjerne sekcije  $A_{ts}$ , ujedno osiguravaju malu „blokadu“ tunela  $Br=A_{swt}/A_{ts} (<1:10)$  pri ugradnji modela SWT frontalne površine  $A_{swt}$ . Iz ovih tunela [5] potječu prvi pouzdani eksperimentalni rezultati o značajkama SWT koji su korišteni za validaciju CFD simulacije strujanja oko SWT. Malen

ispravak “sirovih“ eksperimentalnih rezultata iz ovih vjetrotunela zbog male blokade olakšava usporedbu CFD značajki SWT s eksperimentalnim značajkama uz pojednostavljeno modeliranje “CFD vjetrotunela“.

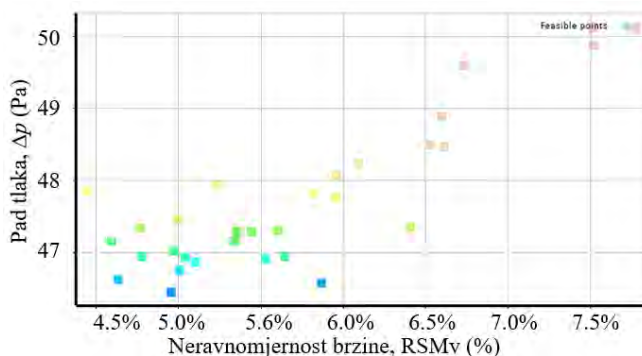
Donja granica u veličini mjerne sekcije vjetrotunela određena je izborom veličine modela SWT (promjera  $D_{swt}$ , visine kola  $H_{swt}$  turbine) i ciljanom blokadom presjeka tunela  $Br \leq 10$ . Fizički modeli SWT s optimiziranim geometrijom kola, testirani u starom tunelu, izvedeni su s promjerom kola  $D_{swt}=400\text{mm}$ . Izbor veličine promjera modela kola je pod utjecajem težnje za mjerenjem s modelom vjetroturbine veće snage  $P_{swt} (\sim D_{swt}^2)$ , kako bi se pouzdano potvrdilo povećanje  $P_{swt}$  zbog optimizacije lopatica i pri većim vrijednostima Reynoldsovog broja  $Re=v_{\infty}D_{swt}/\nu \geq 10^5$ . Posljedično je izbor visine mjerne sekcije ograničen na 1,4 m, što je još uvijek dovoljno veliko da bi se izvršilo mjerenje s modelom veće visine (omjera  $Ar=H_{swt}/D_{swt}=1,5$ ) spram uobičajenog  $Ar=1,0$ .

## 2 Numerička optimizacija korištenjem CFD modela

Sve naredne numeričke optimizacije temelje se na 3D CFD modelu strujanja. Korišten je SST model turbulencije, mreža je nestrukturirana tetraedarska uz  $y^+ \approx 1$  za prvi sloj konačnih volumena mreže uz stijenku. Broj elemenata za punu simulaciju je iznosio 1,5 milijuna za cjelokupnu geometriju te 0,4 milijuna za izdvojenu sapnicu, mjernu sekciju i difuzor. Odabrana je diskretizacijska shema drugog reda točnosti. Korišten je računalni paket ANSYS CFX 2022.

Sve optimizacije izvršene su kao višekriterijska optimizacija korištenjem adaptivnog višekriterijskog optimizacijskog algoritma koji je opisan u ANSYS priručniku [6]. Funkcije cilja su bile pad tlaka između ulaza i izlazu proračunske domene ( $\Delta p$ ) te neravnomjernost uzdužne komponente brzine u mjernoj sekciji (RSM<sub>v</sub>). Neravnomjernost se računala u dijelu presjeka mjerne sekcije izvan graničnog sloja, a uzeta je udaljenost u iznosu 10% širine odnosno visine mjerne sekcije. S obzirom na prirodu višekriterijske optimizacije, rezultat optimizacije je nekoliko Pareto optimalnih rješenja, slika 2. Od ovih rješenja odabrano bi bilo rješenje koje je proizvoljno odabrani kompromis između pada tlaka i neravnomjernosti na način da se uzme rješenje sa što manjim RSM<sub>v</sub> ali prije naglog povećanja  $\Delta p$ .

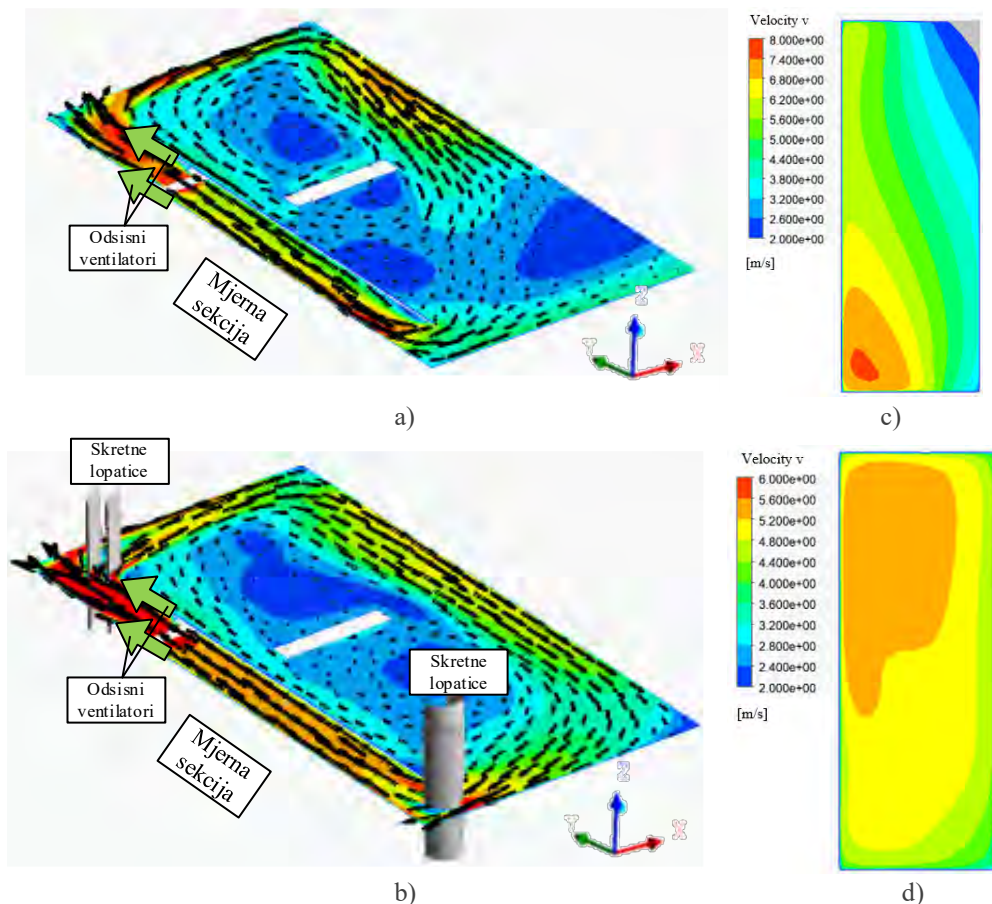
Kod svake optimizacije postavljena su ograničenja na geometrijske parametre u nekom rasponu. Često bi se dogodilo da rješenje konvergira na ekstremnu vrijednost nekog od optimizacijskih parametara. U tom slučaju, optimizacija bi bila ponovljena s povećanim rasponom parametara. Svaka optimizacija opisanih u narednim poglavljima je ponovljena nekoliko puta. Sve optimizacije su provedene s jednakim volumenskim protokom kroz tunel.



Slika 2. Primjer dobivenog skupa rješenja kod optimizacije skretnih lopatica.

## 2.1 Optimizacija skretnih lopatica

Nakon što je izrađena prva verzija KNM vjetrotunela (vidi sliku 3a), bila je primjetna značajna neravnomjernost brzine (što je i očekivano s obzirom na geometriju). Prvi korak u optimizaciji je bio dizajn skretnih lopatica i zaobljenje ruba ulaznog otvora. Ove dodatne usmjerivačke površine su geometrijski modelirane kao kružni lukovi, gdje su varijable bile promjer, obuhvatni kut te položaj. Na ulazu se nalaze dvije skretne lopatice i zaobljenje ulaznog ruba, a na izlazu samo 2 skretne lopatice. Optimizacija je izvršena u verzijama s 1-4 skretne lopatice i pokazalo se da nakon 2 lopatice nema značajnijeg poboljšanja odnosno smanjenja pada tlaka  $\Delta p$  u vjetrotunelu. U inicijalnom dizajnu KNM vjetrotunela (slika 3a), pad tlaka iznosi  $\Delta p=73\text{Pa}$ , a neravnomjernost uzdužne komponente brzine u središnjem presjeku mjerne sekcije je  $\text{RMSv}=22,2\%$ . Nakon optimizacije, postiglo se značajno poboljšanje,  $\Delta p=47\text{Pa}$  i  $\text{RMSv}=4,8\%$ . Vrijedi napomenuti da je nesimetrična (gore-dolje) slika strujanja posljedica uzstrujnog-nizstrujnog utjecaja dva ventilatora smještenih na višem položaju od poda laboratorija nego trećeg ventilatora postavljeno bliže podu



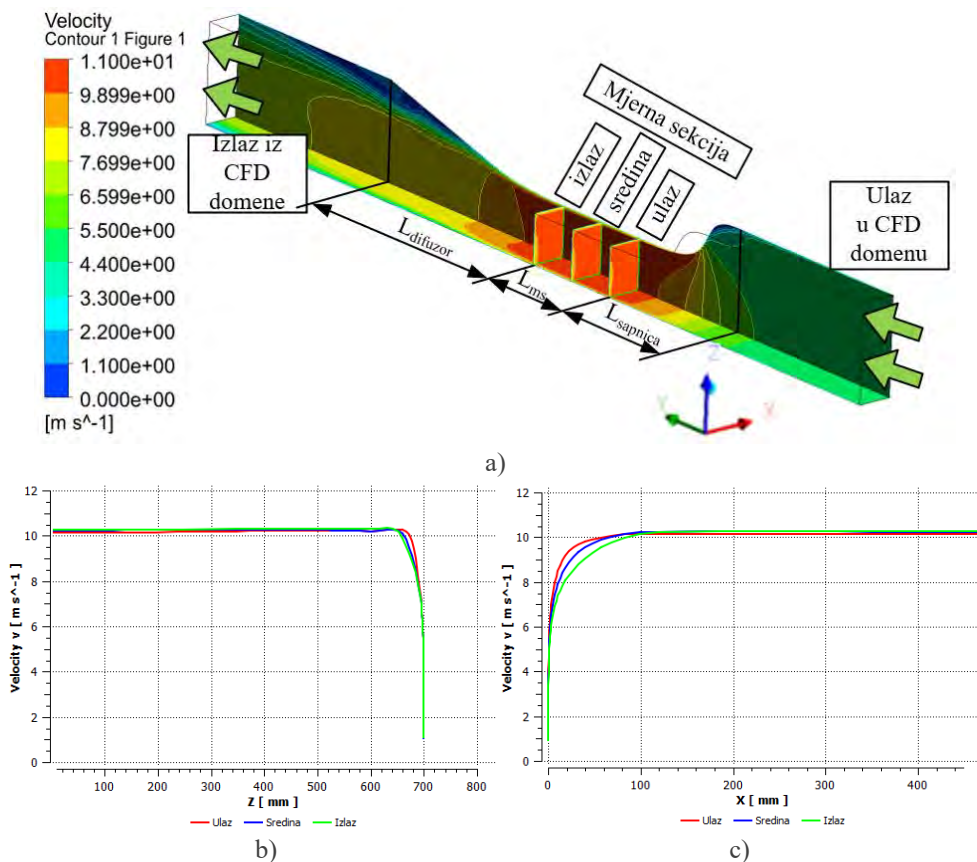
Slika 3. Brzina strujanja na poluisini cijele domene: a) inicijalna geometrija i b) optimirane skretne lopatice; c) i d) Uzdužna komponenta brzine duž središnjeg poprečnog presjeka mjerne sekcije za inicijalnu geometriju i uz optimirane skretne lopatice.

## 2.2 Optimizacija oblika središnje dionice vjetrotunela (sapnica+mjerna sekcija+difuzor)

Kontura sapnice je oblikovana s B-spline krivuljama uz C1 i C2 uvjete kontinuiteta (kontinuitet zakrivljenosti). Kontura difuzora je oblikovana s pravcem te B-spline krivuljom koja glatko prelazi na mjernu sekciju. Kontinuitet je osiguran postavljanjem prve tri kontrolne točke na oba kraja spline krivulje na pripadajući pravac koji tangira susjednu geometriju. Uz kontrolne točke spline krivulja, parametri za optimizaciju bili su i dužina sapnice i difuzora. Dužina mjerne sekcije je postavljena na 1.5m u svim slučajevima.

Ova optimizacija je provedena uz CFD analizu strujanja za središnju dionicu koja obuhvaća sapnicu, mjernu sekciju i difuzor. Na ulaznoj granici proračunske domene, blago odmaknutoj od ulaznog presjeka sapnice, kao granični uvjet je propisan jednolik profil brzine a nizstrujno od difuzora je kao granični uvjet narinut tlak  $p=0\text{Pa}$ . Ovo je omogućilo provedbu CFD simulacije strujanja samo u jednom kvadrantu pune proračunske domene.

Kontrakcijom poprečnog presjeka sapnice, tj. smanjenjem visine sapnice od 2,8m na 1,4m (omjer kontrakcije 2) u različitim poprečnim presjecima mjerne sekcije ostvaren je  $RMSv_{ulaz}=0,6\%$ ,  $RMSv_{sredina}=0,2\%$  i  $RMSv_{izlaz}=0,5\%$ , za središnji dio presjeka mjerne sekcije izvan graničnog sloja.

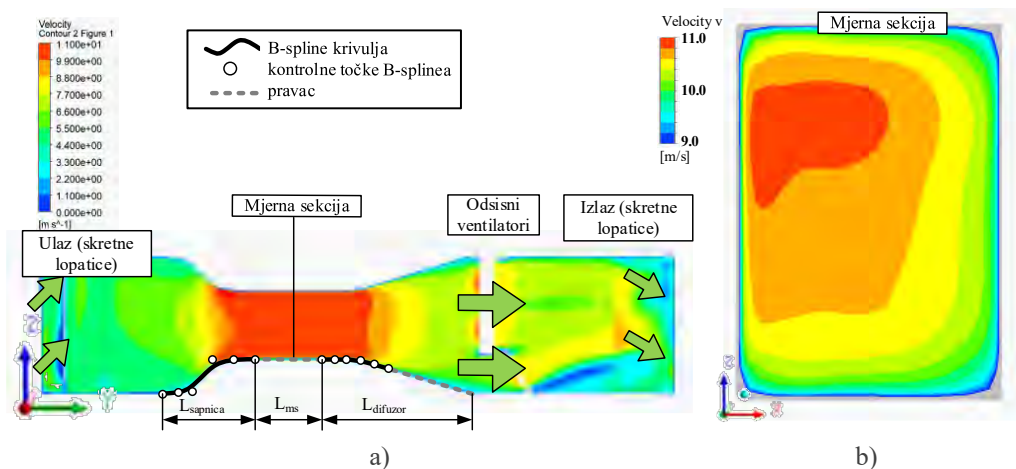


Slika 4. a) polje brzine u uzdužnom vertikalnom i horizontalnom srednjem presjeku kroz os mjerne sekcije; profil uzdužne komponente brzine duž: b) vertikalne i c) horizontalne središnje linije poprečnog presjeka u sredini mjerne sekcije.



### 2.3 Utjecaj optimirane središnje sekcije na strujanje u vjetrotunelu

Prethodno optimizirana geometrija središnje dionice u potpoglavlju 2.2, je prekopirana-ugrađena u cijelu domenu vjetrotunela sa skretnim lopaticama. Raspodjela uzdužne komponente brzine strujanja u vertikalnom uzdužnom presjeku kroz os mjerne sekcije na slici 5a pokazuje veliku ujednačenost brzine po duljini mjerne sekcije. CFD analiza strujanja je pokazala smanjenje neravnomjernosti uzdužne komponente brzine s 4,9% (slika 3c) na  $RSM_v=1,4\%$  (slika 5b).



Slika 5. a) brzina strujanja u uzdužnom vertikalnom presjeku kroz os KNM vjetrotunela te b) uzdužna komponenta brzine duž središnjeg poprečnog presjeka mjerne sekcije (*obratiti pažnju na različite mjerne skale za brzinu*).

## 3 Zaključak

U radu je opisan postupak numeričke optimizacije postojećeg vjetrotunela za ispitivanje malih modela Savonius vjetroturbine. Numeričkom optimizacijom je ostvarena neravnomjernost uzdužne komponente brzine u mjernoj sekciji  $RSM_v=1,4\%$ , dok literatura preporučuje  $RSM_v$  manji od 1%. Budući rad se sastoji u dodavanju usmjerivača i mreža smještenih između skretnih lopatica i sapnice za dodatno reduciranje neravnomjernosti brzine u mjernoj sekciji uz prethodnu numeričku optimizaciju.

## Literatura

- [1] Marinić-Kragić, I., Vučina, D. i Milas, Z.; Computational analysis of Savonius wind turbine modifications including novel scooplet-based design attained via smart numerical optimization; J. Clean. Prod.; 2020; doi: 10.1016/j.jclepro.2020.121310.
- [2] Barlow, J. B., Rae, W. H. i Pope, A.; Low-Speed Wind Tunnel Testing; Wiley; 1999.

- 
- [3] Mehta, R. D. i Bradshaw, P.; Design rules for small low speed wind tunnels; *Aeronaut J*; 1979; 83, 827; 443–453; doi: 10.1017/S0001924000031985.
- [4] Erm, L. P. i Jacquemin, P.; Calibration of the Flow in the Test Section of the Research Wind Tunnel at DST Group; 2015; [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53955969>.
- [5] Sheldahl, R. E., Blackwell, B. F. i Feltz, L. V.; Wind tunnel performance data for two- and three-bucket Savonius rotors; *J. Energy*; 1978; 2, 3; 160–164; doi: 10.2514/3.47966.
- [6] ANSYS Inc; “ANSYS (computer program).” Ansys Inc.; 2016; [Online]. Available: <http://www.ansys.com/>.

## Dopuna smjernica za oblikovanje nosača mosnih dizalica

Miler, D.<sup>1</sup> i Hoić, M.<sup>2</sup>

### Sažetak

Inicijalne dimenzije glavnog nosača mosne dizalice se određuju pomoću empirijskih smjernica te ovise isključivo o razmaku između tračnica glavnog nosača, što često vodi do većih odstupanja uslijed varijacije nosivosti. Stoga je u ovom radu ispitan utjecaj nazivne nosivosti mosne dizalice na potrebne dimenzije nosača, što je učinjeno optimiranjem modela dobivenog korištenjem važećih standarda. Promatrane su dvije vrijednosti razmaka između tračnica glavnog nosača – 12 m i 18 m. Optimiranje je provedeno za pet različitih opterećenja (2 t, 5 t, 10 t, 20 t i 50 t), nakon čega su rezultati uspoređeni sa smjernicama. Uočeno je relativno veliko rasipanje vrijednosti projektnih varijabli u ovisnosti o nazivnom opterećenju; smjernice su u pravilu bile točnije za niža opterećenja te su odstupanja rasla s opterećenjem. Najveća odstupanja su uočena u preporučenoj debljini pojasnice nosača. Konačno, zanimljivo je da je stabilnost hrptova osigurana povećavanjem njihove debljine, a ne poprečnim ojačanjima koja su često korištena.

**Ključne riječi:** oblikovanje nosive konstrukcije, mosna dizalica, optimiranje konstrukcija

---

<sup>1</sup> **dr. sc. Daniel Miler**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Matija Hoić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: matija.hoic@fsb.hr

## 1 Uvod

Prilikom oblikovanja nosivih konstrukcija, konstruktori se često koriste empirijske smjernice kako bi početna točka razvoja bila što bliža konačnom rješenju. Time se vrijeme potrebno za konstruiranje smanjuje budući da će, u pravilu, biti potrebno manje iteracija, što čini konačni proizvod konkurentnijim na tržištu. Pritom će točnost smjernica i ranije iskustvo konstruktora uvelike utjecati na broj iteracija, a time i cijenu proizvoda.

Analogan proces se koristi i kod oblikovanja mosnih i portalnih dizalica. Kako se u velikoj većini slučajeva radi o dobro poznatim sustavima, velik dio podsustava se oblikuje i dimenzionira prema dobro definiranim izrazima. U ovu grupu pripadaju užad te podsklopovi kuka, užnica, bubnjevi i kotača, kao i pogoni. S druge strane, nosiva konstrukcija će zbog širokog spektra mogućnosti opterećenja i primjene najčešće iziskivati individualan pristup. Kao rezultat toga, smjernice za dimenzioniranje nosivih konstrukcija su općenitije i propisuju prihvatljive raspone umjesto egzaktnih vrijednosti. Tako postojeći izrazi za oblikovanje nosivih konstrukcija u obzir uzimaju samo raspon konstrukcije, zanemarujući utjecaj nazivnog opterećenja (nosivosti) [1].

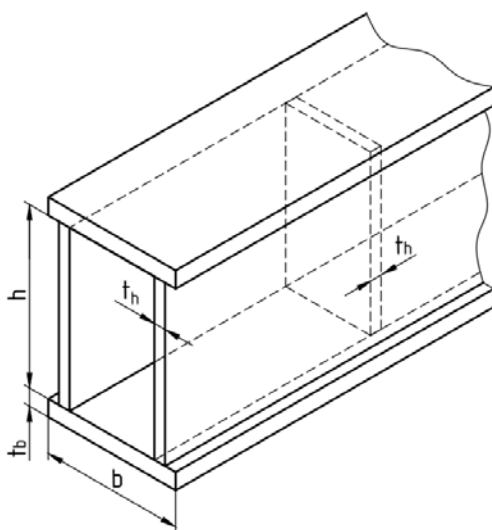
Korištenje smjernica se može izbjeći izradom matematičkih modela te primjenom metoda optimiranja (matematičko programiranje) na njih. No, ovakav pristup je vremenski zahtijevan te iziskuje izvrsno poznavanje predmeta koji se izrađuje i postupka optimiranja, te kao takav ne može zamijeniti u potpunosti smjernice. Stoga, kako bi se omogućila daljnja dopuna smjernica, u ovom radu su dimenzije dobivene korištenjem postojećih smjernica za oblikovanje nosive konstrukcije mosne dizalice uspoređene s rezultatima dobivenim optimiranjem. U nastavku su pobliže opisani promatrani slučajevi, korištene smjernice i računalni alati.

## 2 Metoda

Kako bi se dimenzije dobivene korištenjem dostupnih smjernica usporedile sa stvarno potrebnim vrijednostima, promatrana su dva slučaja – razmaci tračnica  $L_1 = 12$  m i  $L_2 = 18$  m. Za svaki od razmaka izračunate pretpostavljena je zavarena kutijasta izvedba glavnog nosača s poprečnim ojačanjima (Slika 1). Nadalje, promatrano je pet projektnih varijabli – širina pojasa nosača ( $b$ ), debljina pojasa ( $t_b$ ), visina hrbata ( $h$ ), debljina hrbata ( $t_h$ ) te broj poprečnih ojačanja ( $n$ ). Valja napomenuti da je pretpostavljeno da je debljina poprečnih ojačanja jednaka debljini hrpta. Prema smjernicama dostupnim u [1], vrijednosti projektnih varijabli su:

$$\begin{aligned}
 h &= \left( \frac{1}{18} \dots \frac{1}{12} \right) L \approx \frac{L}{15}; & h_1 &= 800 \text{ mm}, h_2 = 1200 \text{ mm} \\
 b &\geq \frac{L}{50}; & b_1 &= 240 \text{ mm}, b_2 = 360 \text{ mm} \\
 t_h &= \frac{h}{200} \dots \frac{h}{240} \approx \frac{h}{220} \text{ (min 5 mm)}; & t_{h1} &= 5 \text{ mm}, t_{h2} = 5 \text{ mm} \\
 t_b &= 1.2 \dots 2t_h \approx 1.6t_h; & t_{b1} &= 8 \text{ mm}, t_{b2} = 8 \text{ mm} \\
 l_{uk} &= 1200 \dots 1800 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdje indeks 1 označava razmak tračnica od 12 m, a indeks 2 od 18 m. Također, valja napomenuti da su prilikom određivanja vrijednost varijabli za koje je u smjernicama ponuđen raspon odabrane srednje vrijednosti.



Slika 1. Prikaz nosača korišten u izradi matematičkog modela

Postupak optimiranja proveden je za iste razmake između tračnica glavnog nosača, koji odgovaraju duljini nosača. Za svaki od razmaka, određene su potrebne dimenzije nosača za pet nosivosti – 2 t, 5 t, 10 t, 20 t i 50 t. Za materijal nosača odabran je čelik S235JR ( $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$ ) te su u proračunu uzeti dinamički i parcijalni faktori sigurnosti koji odgovaraju redovitom radu (slučaj A1) prema HRN EN 13001-2 [2]. Nadalje, za potrebe proračuna čvrstoće i krutosti, poprečni presjek nosača je klasificiran prema Eurocode 1993-1 [3]; zbog specifičnosti područja u obzir su uzete samo klase 3 i 4 (projektiranje isključivo u elastičnom području).

Odabrana vrijednost faktora rizika je 1.15, dok je vrijednost faktora materijala 1. Pretpostavljeno je da će opterećenja i oslanjanje odgovarati modelu grede na dva oslonca. Greda je opterećena koncentriranom (nazivno opterećenje) i kontinuiranom silom (vlastita težina). Kritično opterećenje je dobiveno za slučaj kada se koncentrirana sila nalazi na sredini dužine nosača; utjecaj vlastite težine je općenito značajan kod većih dosega.

Sam postupak je proveden pomoću NSGA-II algoritma unutar Matlab-a. NSGA-II [4] je široko primjenjivan tip genetskog algoritma, generalno korišten za višeciljno optimiranje, no s mogućnošću rješavanja problema s jednim ciljem. Za svaki od promatranih slučajeva veličina populacije je bila 1000 jedinki, broj generacija je bio 100, a broj replikacija 5. Nadalje, rasponi projektnih varijabli su:  $b = [100, 2000]$ ,  $t_b = [5, 40]$ ,  $t_h = [5, 40]$ ,  $h = [100, 2000]$  i  $n = [0, 30]$ . Kako bi se osiguralo da će konačne dimenzije tvoriti inženjerski smisljeno rješenje, uvedena su ograničenja (tablica 1). Konačno, ukupna težina nosača (uključujući poprečne ukrute) je korištena kao funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 2(b \cdot t_b + h \cdot t_h) + n \cdot h \cdot (b - 30 - 2t_h) \quad (2)$$

Setovi podataka dobiveni optimiranjem su normalizirani prema vrijednostima dobivenim koristeći smjernice prikazanim u izrazu (1) kako bi se pojednostavila usporedba. Drugim riječima, vrijednosti svake od projektnih varijabli dobivenim optimiranjem podijeljene su odgovarajućom varijablom za pripadajući razmak tračnica.

Tablica 1. Primijenjena ograničenja

Naziv uvjeta		Opis	Konačni izraz
Progib		Progib mora biti manji od dopuštene vrijednosti kako bi propisani uvjeti krutosti bili zadovoljeni.	$w \leq \frac{L}{600}$
Savijanje		Naprezanje na savijanje pojasa mora biti manje od dopuštenog.	$M_{ED} \leq M_{CRD}$
Stabilnost limova	Aksijalno	Stabilnost hrkata kutijastog zavarenog nosača provjerava se s obzirom na četiri kriterija – aksijalnu, vertikalnu i smičnu otpornost, kao i njihovo međudjelovanje. Pretpostavljeno je da bočni limovi imaju obostrane ukrute.	$u_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_{dx}} \leq 1$
	Vertikalno		$u_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_{dz}} \leq 1$
	Smik		$u_\tau = \frac{\tau}{\tau_d} \leq 1$
	Složeno opterećenje		$u_{xz\tau} = u_x^{e1} + u_z^{e2} + u_\tau^{e3} - V u_x u_z \leq 1$
Pristup zavarivača		Kako bi se nosač mogao izraditi, potrebno je zavarivaču omogućiti pristup spojevima između limova. Uvjet odabran prema [5], s maksimalnim prostorom od 300 mm.	$S_k \geq \min(h \tan 20^\circ, 300)$

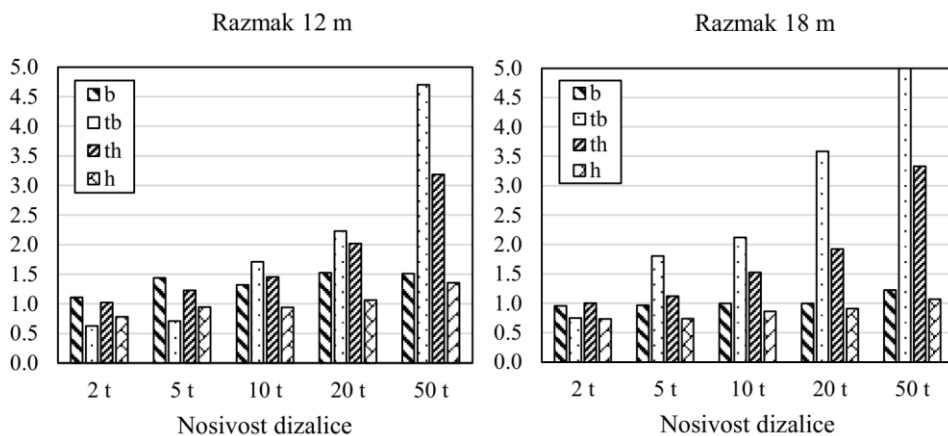
### 3 Rezultati i diskusija

Podaci dobiveni nakon što je provedena optimizacija za svaki od deset navedenih slučajeva prikazani su na slici 2. Promatrajući rezultate za oba razmaka tračnica, vidljivo je da smjernice zadovoljavaju uvjete isključivo za manja opterećenja; za 2 t smjernice u potpunosti zadovoljavaju sve uvjete (faktor u dijagramu manji od 1).

Širina nosača  $b$  je u pravilu bila gotovo identična vrijednostima dobivenim smjernicama za razmak tračnica od 18 m. Dobivene vrijednosti su bile gotovo identične preporučenoj vrijednosti od 360 mm za opterećenja od 2 t do 20 t – redom su dobivene širine od 344 mm, 347 mm, 358 mm i 359 mm. Iznimka je bilo opterećenje od 50 t, za koji je dobivena širina od 442 mm. Vrijednosti za razmak od 12 m su bile nešto više od smjernica – optimiranjem je dobiveno od 266 mm do 367 mm u odnosu na preporučenih 240 mm.

Nadalje, visina hrkata  $h$  je u pravilu bila gotovo identična ili vrlo bliska preporučenoj. Normalizirane vrijednosti su bile u rasponu od 0.732 (18 m, 2 t) do 1.355 (12 m, 50 t) unatoč tome da je inicijalno očekivano veliko povećanje visine nosača za razmak od 18 m i opterećenje od 50 t. Jedan od razloga dobivenog odnosa između vrijednosti širine nosača i visine hrkata može biti ograničenje vezano za prostor potreban za zavarivanje.

Najizraženije razlike između smjernica i rezultata su dobivene za debljina pojasnica nosača  $t_b$ , posebice kod većeg razmaka tračnica. Vrijednosti su bile višestruko veće pri opterećenjima od 5 t i više te je razlika bila izraženija kod većeg razmaka između tračnica. Konačno, za oba razmaka tračnica pri opterećenju od 50 t računski dobivene vrijednosti su bile gotovo pet puta veće od onih dobivenim smjernicama.



Slika 2. Normalizirane vrijednosti projektnih varijabli

Algoritam je za sve slučajeve uklonio poprečna ojačanja ( $n = 0$ ), zbog čega vrijednost broja limova nije izražena na slici 2. Posljedično tomu su, kako bi se osigurala dovoljna stabilnost hrptova, povećane su njihove debljine  $t_h$  za nazivne terete od 5 t i više. Najveće vrijednosti su odabrane za opterećenje od 50 t te su redom za razmake od 12 m i 18 m iznosile 16 mm i 17 mm u odnosu na 5 mm odabranih prema smjernicama.

## 4 Zaključak

U radu je proveden postupak optimiranja zavarenih kutijastih nosača mosne dizalice te su rezultati uspoređeni sa dostupnim smjernicama za konstruiranje. Promatrana su dva različita slučaja – razmak tračnica od 12 m te razmak od 18 m i pet razina opterećenja; nazivni tereti su varirani od 2 t do 50 t. Za izračun rezultata korišten je genetski algoritam NSGA-II. Kako bi konstrukcije dobivene optimiranjem bile inženjerski primjenjive korišteno je sedam ograničenja, koja su obuhvaćala uvjete krutosti, uvjete čvrstoće, stabilnost limova hrpta te prostor potreban za pristup zavarivača. Na osnovu dobivenih rezultata izvučeni su sljedeći zaključci:

- Uočeno je relativno veliko rasipanje vrijednosti projektnih varijabli u ovisnosti o nazivnom opterećenju. Na osnovu toga, potvrđena je potreba da se u smjernice uz sam raspon uvede i utjecaj nazivnog opterećenja.
- Smjernice su bile vrlo točne za manja opterećenja te su odstupanja rasla s porastom nazivnog opterećenja.
- Najveća odstupanja su uočena u debljinama pojasnica nosača. Prema smjernicama, za oba razmaka tračnica preporučeno je uzeti debljinu od 8 mm, dok su vrijednosti dobivene optimiranjem za veća opterećenja kako slijedi: 14 mm (12 m) i 17 mm (18 m) za 10 t, 18 mm i 29 mm za 20 t i 38 mm i 40 mm za 50 t. Valja napomenuti da odabir limova većih debljina može rezultirati značajnim tehnološkim problemima, ponajprije vezanim za zavarivanje, što može biti jedan od razloga za uvođenje ukruta.
- Za sva računski dobivena rješenja odabrana je konfiguracija bez poprečnih ojačanja ( $n = 0$ ), što je kompenzirano većom debljinom hrpta i pojasnica.

**Literatura**

- [1] Herold, Z., Šćap D. i Hoić M.; Prenosila i dizala; Sveučilište u Zagrebu; Zagreb, 2020.
- [2] Hrvatski zavod za normizaciju: HRN EN 13001-2:2021 -- Sigurnost granika -- Osnove projektiranja -- 2. dio: Djelovanje opterećenja, 2021.
- [3] Hrvatski zavod za normizaciju: HRN EN 1993.1.1:2014 -- Eurokod 3: Projektiranje čeličnih konstrukcija -- Dio 1-1: Opća pravila i pravila za zgrade, 2014.
- [4] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. i Meyarivan, T.: A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II; IEEE Transactions on Evolutionary Computation: 2002; 6, 2, 182-197.
- [5] American institute of steel construction: Steel construction manual (15. izdanje); AISC, 2017.



# Ocjena potresne otpornosti kamenih zidanih zgrada statičkom nelinearnom metodom postupnog guranja

Nikolić, Ž.<sup>1</sup> i Runjić, L.<sup>2</sup>

## Sažetak

Analiza potresne otpornosti kamenih zidanih zgrada tipičnih za dalmatinske gradove je od velike važnosti za poduzimanje preventivnih mjera podizanja sigurnosti stanovništva i zaštite materijalnih dobara u budućim potresima.

U radu se istražuje potresno ponašanje, mehanizmi sloma i kapacitet nosivosti postojećih kamenih zidanih zgrada pomoću statičke nelinearne metode postupnog guranja prema Eurokodu 8 koristeći numerički prostorni model ekvivalentnog okvira i horizontalno potresno opterećenje, prikazano u obliku jednolike, linearne i višemodalne raspodjele, koje se postupno povećava do sloma. Iz dobivenih krivulja kapaciteta nosivosti određuju se vršna ubrzanja tla za tri granična stanja koja odgovaraju početku oštećenja, značajnom oštećenju i slomu zgrade. Izračunata vršna ubrzanja uspoređuju se sa zahtjevom za odgovarajuću lokaciju zgrade.

Provedena analiza pokazala je da niti jedna zgrada ne zadovoljava zahtjev potresne otpornosti. Rezultati za vršna ubrzanja tla za tri granična stanja ukazuju na vrlo malu nosivost na potresna opterećenja zgrada s fleksibilnim drvenim međukatnim konstrukcijama, te nešto veću nosivost kod zgrada koje su doživjele određene rekonstrukcije uvođenjem krutih međukatnih konstrukcija i duktilnih armirano-betonskih zidova. Pored toga, značajne su razlike u dobivenim rezultatima za tri različite raspodjele opterećenja, što sugerira primjenu višemodalne raspodjele za tlocrtno i visinski nepravilne zgrade, koje uz to imaju fleksibilne međukatne konstrukcije.

**Ključne riječi:** potresna otpornost, kamene zidane zgrade, nelinearna statička metoda postupnog guranja, kapacitet nosivosti

---

<sup>1</sup> prof. dr. sc. Željana Nikolić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: zeljana.nikolic@gradst.hr

<sup>2</sup> Luka Runjić, mag. ing. aedif., Projektni Biro Runjić, 21000 Split, e-mail: lrunjic.ured@gmail.com

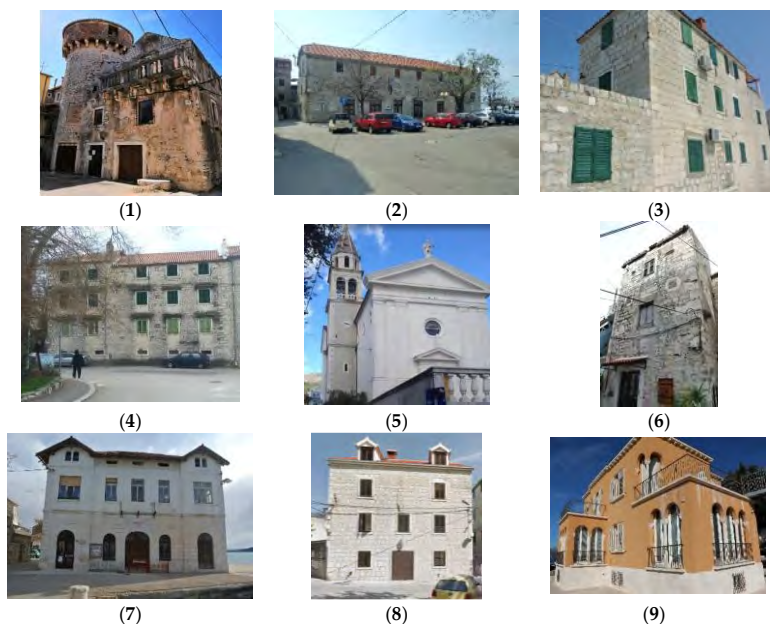
## 1 Uvod

Potresna otpornost kamenih zidanih građevina u povijesnim gradskim središtima smještenima u potresno aktivnim područjima važna je za sigurnost stanovnika u slučaju potresnog djelovanja. Procjena potresne otpornosti zgrada složen je zadatak koji zahtijeva primjenu nelinearnih metoda kao što su nelinearna statička metoda postupnog guranja (NSMPG), u kojoj se zgrada postupno opterećuje do sloma prema jednolikoj, linearnoj ili modalnoj raspodjeli opterećenja, ili inkrementalna dinamička analiza (IDA), u kojoj se ubrzanje tla povećava do sloma konstrukcije. Obje vrste analiza omogućuju praćenje razine oštećenja i određivanje kapaciteta nosivosti.

U radu se istražuje potresno ponašanje, mehanizmi sloma i kapacitet nosivosti postojećih kamenih zidanih zgrada u dalmatinskom priobalju. Većina analiziranih zgrada je nesimetrična u tlocrtu i nepravilna po visini s fleksibilnim drvenim međukatnim konstrukcijama, što ih čini vrlo osjetljivima na horizontalno potresno djelovanje. Analiza potresne otpornosti vrši se pomoću NSMPG prema Eurokodu 8 [1]. Iako je primjena NSMPG preporučljiva samo za zgrade koje osciliraju pretežno u prvom vlastitom obliku, zbog složenosti IDA, u posljednje vrijeme se istražuje primjenjivost višemodalne raspodjele opterećenja i kod zgrada koje ne zadovoljavaju navedeni uvjet. U ovome radu istražuje se potresna otpornost zgrada pomoću NSMPG koristeći numerički prostorni model ekvivalentnog okvira i horizontalno potresno opterećenje, prikazano u obliku jednolike, linearne i višemodalne raspodjele, koje se postupno povećava do sloma. Iz dobivenih krivulja kapaciteta nosivosti određuju se vršna ubrzanja tla za tri granična stanja koja odgovaraju početku oštećenja, značajnom oštećenju i slomu zgrade [2]. Izračunata vršna ubrzanja uspoređuju se sa zahtjevom za odgovarajuću lokaciju zgrade.

## 2 Osnovni podaci o analiziranim zgradama

U ovom radu, analizira se potresna otpornost zgrada u povijesnoj jezgri Kaštel Kambelovca, naselja smještenog u blizini Splita. Zgrade su izgrađene između 15. i 19. stoljeća (Slika 1) [3, 4]. Zidane su od kamenih blokova s mortom u sljubnicama, debljine zidova između 45 i 75 cm. Međukatne konstrukcije i krovovi su izvedeni kao fleksibilni te se sastoje od drvenih greda i drvene podne obloge koje su pri rekonstrukcijama kod nekih zgrada mjestimično zamijenjene armirano-betonskim pločama (zgrade 8 i 9 na slici 1). Većina zgrada je nesimetrična u tlocrtu i nepravilna po visini. Identifikacija karakteristika tla provedena je geofizičkim ispitivanjem [5] te je utvrđeno da sve analizirane zgrade imaju klasu tla A. Mehaničke karakteristike zidova uzete su prema literaturi [6].



Slika 1. Analizirane zgrade u povijesnoj jezgri Kaštel Kambelovca: (1) Kula Cambi, (2) Knjižnica, (3) Pučki kaštel, (4) Dudanova palača, (5) crkva Sv. Mihovila, (6) Kumbatove kule, (7) Veslački klub, (8) Zgrada-r, (9) Baletna škola

### 3 Proračun kapaciteta nosivosti statičkom nelinearnom metodom postupnog guranja

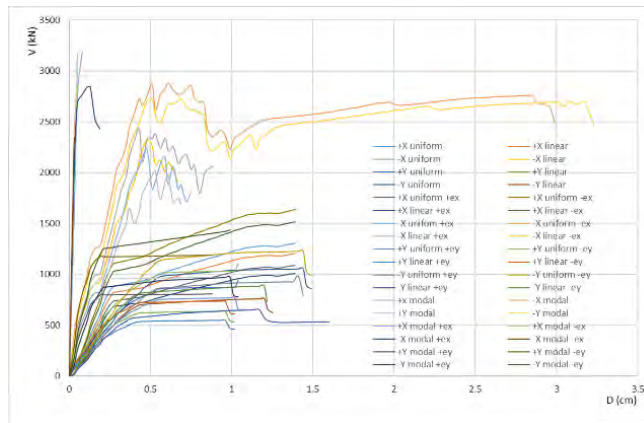
Globalni kapacitet nosivosti zgrada prikazan vršnim ubrzanjima tla izračunava se iz krivulje kapaciteta za tri granična stanja prema HRN EN 1998-3:2011 [2] pomoću statičke nelinearne metode postupnog guranja. Analiziraju se slijedeća granična stanja (Slika 2):

- (1) blizu rušenja (BR) koje odgovara najvećem pomaku  $d_u$  za koji se izračunava vršno ubrzanje  $PGA_{BR}$
- (2) znatno oštećenje (ZO) koje odgovara vrijednosti od  $\frac{3}{4}$  najvećeg pomaka za koji se izračunava vršno ubrzanje  $PGA_{ZO}$
- (3) ograničeno oštećenje (OO) koje odgovara pomaku na granici popuštanja s pripadnim vršnim ubrzanjem  $PGA_{OO}$

Navedena vršna ubrzanja određuju se metodom postupnog guranja prema Eurokodu 8 [1] pomoću računalnog programa TREMURI [7] analizirajući krivulje kapaciteta nosivosti dobivene postupnim povećanjem horizontalnog opterećenja do sloma. Program TREMURI zasnovan je na 3D nelinearnom modelu za analizu zidanih zgrada pomoću makro-elemenata koji simuliraju karakteristične mehanizme sloma kod zidanih konstrukcija. Prati se odgovor u smjeru dvije međusobno okomite osi te uzima slučajni ekscentricitet  $\pm 5\%$  od najveće dimenzije horizontalne stropne konstrukcije. Raspodjela opterećenja može biti jednolika, linearna i modalna. Kako su zgrade uglavnom nepravilne u tlocrtu i po visini, u ovome radu koristi se jednolika, linearna i višemodalna raspodjela opterećenja definirana većim brojem vlastitih vektora.

Kapacitet konstrukcije izražen s vršnim ubrzanjem PGA uspoređuje se sa zahtjevom. Zahtjev na lokaciji Kaštel Kambelovac, gdje su smještene analizirane zgrade, dan je kartama potresne opasnosti RH i iznosi  $a_{gR} = 0,113g$  za povratno razdoblje od 95 godina, koje odgovara zahtjevu ograničenog oštećenja te  $a_{gR} = 0,223g$  za povratno razdoblje od 475 godina, koje odgovara zahtjevu znatnog oštećenja.

Na slici 2 prikazan je primjer dobivenih krivulja postupnog guranja za smjer x i y i različite raspodjele horizontalnog opterećenja za smjer x i y za zgradu knjižnice.



Slika 2. Krivulje postupnog guranja i bilinearna idealizacija najkritičnijih krivulja za smjer x i y za zgradu knjižnice

Kritična vršna ubrzanja za tri granična stanja (početak oštećenja, značajno oštećenje i slom) za smjer x i y i različite raspodjele opterećenja prikazana su u Tablici 1. Najkritičnija raspodjela opterećenja u smjeru x i y je linearna te rezultira vršnim ubrzanjima za stanje blizu rušenja  $PGA_{BR} = 0,123g$  za smjer x i  $PGA_{BR} = 0,079g$ . Najniže vršno ubrzanje za ovu zgradu i stanje blizu rušenja je dobiveno za smjer y i iznosi  $PGA_{BR} = 0,079g$ .

Tablica 1. Kritična vršna ubrzanja za tri granična stanja – zgrada knjižnice

Smjer	Opterećenje	Ekscentricitet	$PGA_{00}/g$	$PGA_{Z0}/g$	$PGA_{BR}/g$
+x	jednoliko	+5%	0,052	0,100	0,130
+x	linearno	+5%	0,048	0,095	0,123
-x	modalno	-5%	0,107	0,156	0,208
+y	jednoliko	+5%	0,040	0,069	0,089
+y	linearno	+5%	0,028	0,061	0,079
+y	modalno	+5%	0,042	0,114	0,144

Prema tehničkom propisu [8] proračunska potresna otpornost zgrade definirana je vršnim ubrzanjem tla za stanje znatnog oštećenja  $PGA_{Z0}$ . Propis također definira indeks znatnog oštećenja IZO kao omjer proračunske potresne otpornosti i zahtjeva za granično stanje znatnog oštećenja koji je dan vršnim ubrzanjem tla za povratno razdoblje  $T=475g$  (na promatranoj lokaciji iznosi  $a_{gR} = 0,223g$ ). Indeksi znatnog oštećenja za zgradu knjižnice iznose  $IZO_x = 0,43$  i  $IZO_y =$

0,27, odakle je jasno da zgrada ima malu potresnu otpornost koja za smjer y iznosi svega 27% zahtijevanog ubrzanja. Analizirajući odstupanja za vršna ubrzanja za zahtjev znatnog oštećenja, vidljivo je da su najveća odstupanja  $PGA_{z0}$  između modalne i linearne raspodjele te za smjer x iznose 56%, a za smjer y 86%.

Proračun kritičnih vršnih ubrzanja za tri granična stanja za ostale zgrade pokazao je da linearna raspodjela opterećenja daje najniže vrijednosti ubrzanja za Kulu Cambi, Pučki kaštel i Baletnu školu u oba smjera. Modalna analiza daje kritična ubrzanja za Dudanovu palaču, crkvu Sv. Mihovila, Kumbatove kule i Veslački klub. Sve navedene zgrade imaju originalnu drvenu međukatnu i krovnu konstrukciju. Kod zgrade-r drvene međukatne konstrukcije zamijenjene su armirano-betonskim što je prouzročilo nešto višu potresnu otpornost u odnosu na prethodne. Najniže vrijednosti ubrzanja za ovu zgradu dobivene su za linearnu raspodjelu u smjeru y i modalnu u smjeru x. Baletna škola rekonstruirana je s AB međukatnim konstrukcijama, ali je dodano i nekoliko AB zidova pa ova zgrada ima najveću potresnu otpornost, a kritična ubrzanja dobivena su za linearnu raspodjelu opterećenja. Kritična vršna ubrzanja za tri granična stanja za sve zgrade za najkritičniju raspodjelu opterećenja i kritičan smjer prikazana su u Tablici 2.

Tablica 2. Kritična vršna ubrzanja za tri granična stanja – sve zgrade

Zgrada	Kritično opterećenje (smjer x, smjer y)	$PGA_{00}/g$	$PGA_{z0}/g$	$PGA_{BR}/g$
Kula Cambi	linearno/linearno	0,030	0,059	0,078
Knjižnica	linearno/linearno	0,028	0,061	0,079
Pučki kaštel	linearno/linearno	0,041	0,061	0,080
Dudanova palača	modalno/jednoliko	0,051	0,062	0,083
Crkva Sv. Mihovila	modalno/modalno	0,057	0,086	0,102
Kumbatove kule	modalno/modalno	0,057	0,087	0,103
Veslački klub	modalno/modalno	0,064	0,110	0,141
Zgrada-r	modalno/linearno	0,081	0,095	0,152
Baletna škola	linearno/linearno	0,103	0,142	0,183

U Tablici 3 prikazani su indeksi znatnog oštećenja za sve zgrade i oba smjera ( $IZO_x$ ,  $IZO_y$ ).

Tablica 3. Indeksi znatnog oštećenja – sve zgrade

Zgrada	$IZO_x$	$IZO_y$	Najniži IZO
Kula Cambi	0,52	0,26	0,26
Knjižnica	0,43	0,27	0,27
Pučki kaštel	0,27	0,27	0,27
Dudanova palača	0,28	0,30	0,28
Crkva Sv. Mihovila	0,41	0,39	0,39
Kumbatove kule	0,67	0,39	0,39
Veslački klub	0,79	0,49	0,49
Zgrada-r	0,59	0,43	0,43
Baletna škola	0,85	0,64	0,64

## 4 Zaključak

Analiza potresne otpornosti i vršnih ubrzanja za 3 granična stanja za 9 zidanih kamenih zgrada građenih u razdoblju od 15-og do početka 20. st. pokazala je da proračunska potresna otpornost niti jedne zgrade ne zadovoljava zahtjev graničnog stanja ZO ( $a_g=0.223g$  za  $T=475g$ ). Nekoliko zgrada dolazi u stanje ZO i BR za  $a_g<0.113g$  što je zahtjev za povratno razdoblje  $T = 95g$ . Vidljivo je da krute međukatne konstrukcije kod rekonstruiranih zgrada doprinose višem kapacitetu nosivosti u odnosu na zgrade s drvenim konstrukcijama. Dobivena su značajna odstupanja vršnih ubrzanja za različite raspodjele horizontalnih opterećenja (jednolika, linearna, modalna) kod zgrada s drvenim međukatnim konstrukcijama, odakle slijedi da u proračunu kapaciteta nosivosti ovakvih zgrada treba uzeti i modalnu raspodjelu opterećenja s više mjerodavnih vlastitih oblika.

## Zahvala

Istraživanje je financirano projektom Europske unije “Preventing, managing and overcoming natural-hazards risks to mitigate economic and social impact” - PMO-GATE iz programa Interreg Italija-Hrvatska. Parcijalna financijska potpora dobivena je i projektom Hrvatske vlade i Europske unije iz Operativnog programa kompetitivnosti i kohezije (Projekt KK.01.1.1.02.0027).

## Literatura

- [1] HRN EN 1998-1:2011. Eurokod 8: Projektiranje potresne otpornosti konstrukcija–1. dio: Opća pravila, potresna djelovanja i pravila za zgrade; Hrvatski zavod za norme; Zagreb; 2011.
- [2] HRN EN 1998-3:2011. Eurokod 8: Projektiranje potresne otpornosti konstrukcija - 3. dio: Ocjenjivanje i obnova zgrada; Hrvatski zavod za norme; Zagreb; 2011.
- [3] Nikolić, Ž., Runjić, L., Ostojić Škomrlj, N. i Benvenuti, E.; Seismic Vulnerability Assessment of Historical Masonry Buildings in Croatian Coastal Area; Applied Sciences; 2021; 11; 5997.
- [4] Nikolić, Ž., Benvenuti, E. i Runjić, L.; Seismic risk assessment of urban areas by a hybrid empirical-analytical procedure based on peak ground acceleration; Applied Sciences; 2022; 12(7), 3585.
- [5] Da Col, F.; Accaino, F.; Bohm, G. i Meneghini, F.; Characterization of shallow sediments by processing of P, SH and SV wave-fields in Kaštela (HR); Eng. Geol.; 2021, 293; 106336.
- [6] Uranjek, M.; Žarnić, R.; Bokan-Bosiljkov, V. i Bosiljkov, V.; Seizmička otpornost zidanih kamenih građevina i utjecaj injektiranja; Građevinar; 2014; 66, 715-726.
- [7] TREMURI Software, Professional version; S.T.A. DATA: Torino, Italija, 2019.
- [8] Tehnički propis o izmjenama i dopunama tehničkog propisa za građevinske konstrukcije; NN 7/2022, Zagreb; 2022.

## Stohastička identifikacija parametara u problemima propagacije pukotina

Nikolić, M.<sup>1</sup>, Šodan, M.<sup>2</sup>, Stanic, A.<sup>3</sup>, Friedman, N.<sup>4</sup> i Matthies, H.G.<sup>5</sup>.

### Sažetak

U ovom radu prikazana je metodologija za procjenu materijalnih parametara u simulacijama propagacije pukotina. Metodologija uključuje rješavanje inverznog problema koristeći stohastičku metodu Monte Carlo Markovljev lanac. Simulacije propagacije pukotina izvode se pomoću modela temeljenih na ugrađenim diskontinuitetima koji omogućuje da se simulacije provode bez ovisnosti o mreži konačnih elemenata. Prvi model koji se koristi je diskretni rešetkasti model (eng. discrete lattice model), dok drugi model koristi poboljšane kvadrilateralne konačne elemente. Budući da simulacije propagacije pukotina ovise uvelike o materijalnim parametrima, navedeni inverzni postupak dovodi do pouzdanijeg odabira parametara.

**Ključne riječi:** stohastička identifikacija parametara, propagacija pukotina, ugrađeni diskontinuitet

---

<sup>1</sup> **doc. dr. sc. Mijo Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: mijo.nikolic@gradst.hr

<sup>2</sup> **Matej Šodan, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: msodan@gradst.hr

<sup>3</sup> **doc. dr. sc. Andjelka Stanic**, Applied Mechanics and Data Analysis, Faculty of Engineering Technology, University of Twente, Drienerlolaan 5, 7552 NB Enschede e-mail: andjelka.stanic@gmail.com

<sup>4</sup> **dr. sc. Noemi Friedman**, Institute for Computer Science and Control SZTAKI, Budapest, e-mail: noemi@friedmango.net

<sup>5</sup> **prof. emer. dr. sc. Hermann G. Matthies**, Technische Universität Braunschweig, Institute of Scientific Computing, Braunschweig, Germany, e-mail: h.matthies@tu-braunschweig.de

## 1 Metodologija za procjenu parametara

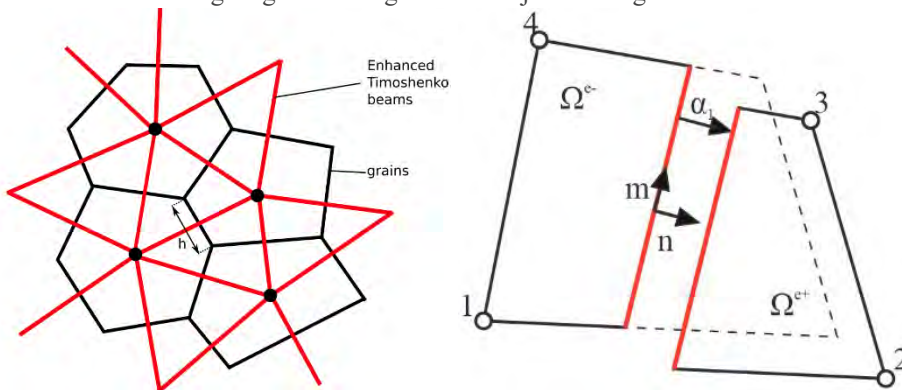
Razvoj preciznih numeričkih modela materijala ne jamči uvijek točno simuliranje njihovog ponašanja. Bayesova inverzna metoda predstavlja stohastičku metodu identifikacije parametara koja omogućuje kalibraciju modela kroz usklađivanje sa stvarnim mjerenjima. Bayesova inverzna metoda temelji se na Bayesovom teoremu uvjetne vjerojatnosti koji procjenjuje distribucija slučajne varijable parametra na temelju dostupnih podataka mjerenja [1]:

$$\pi(z)^d = \frac{L(z)\pi(z)}{\int L(z)\pi(z) dz} \quad (1)$$

U jednadžbi (1) izraz  $\pi(z)$  predstavlja "prior" početnu distribuciju vrijednosti parametara, funkcija  $L(z)$  predstavlja funkciju vjerojatnosti postizanja vrijednosti mjerenja s obzirom na vrijednost parametara, a izraz  $\pi(z)^d$  predstavlja "posterior" distribuciju vrijednosti parametara. Kako se najčešće „posterior“ distribucija ne može zapisati u eksplicitno zatvorenoj formi, razvijene su metode prikupljanja rješenja (eng. 'sampling methods') s ciljem aproksimiranja rješenja. U ovome radu je korištena Monte Carlo Markovljev lanac metoda (MCMC) [2].

## 2 Modeli za propagaciju pukotina

Modeli koji se koriste za identifikaciju parametara u ovome radu su temeljeni na metodi ugrađenih diskontinuiteta [3,6,7]. Ugrađeni diskontinuitet se koristi za rješavanje problema ovisnosti rezultata o mreži konačnih elemenata kod propagirajućih pukotina. U 2D četveročvorni konačni element se ugrađuje diskontinuitet pomoću formulacije nekompatibilnih modova [5]. Model se može koristiti za simulaciju pukotina u problemima mehanike loma, ali i u problemima heterogenih višefaznih materijala. Diskretni rešetkasti model također koristi formulaciju konačnih elemenata s ugrađenim diskontinuitetima gdje su kohezivni elementi Timoshenkove grede i spajaju Voronoi ćelije koje predstavljaju dio materijalnog volumena [4]. Na Slici 1. se vidi rezultat sloma heterogenog višefaznog uzorka uslijed vlačnog testa.

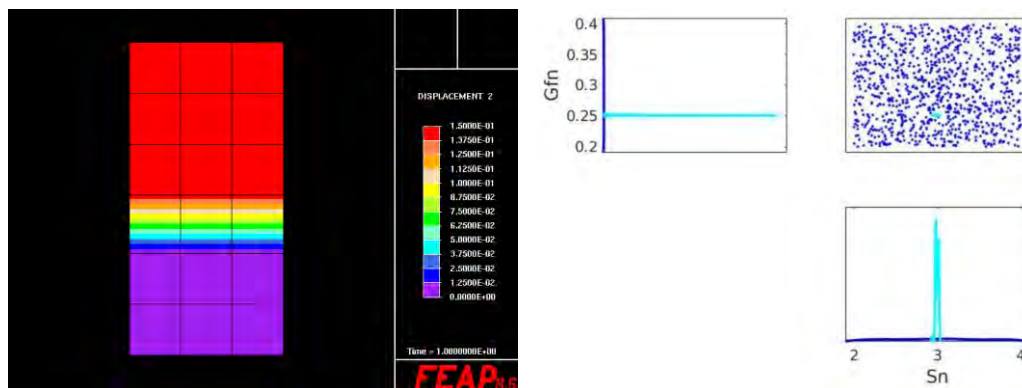


Slika 1. Numerički modeli: a) Metoda rešetkastih elemenata [4]; b) Obogaćeni četveročvorni konačni element [5]



### 3 Rezultati identifikacije parametara

Na slici 2. je prikazana uporaba MCMC za identifikaciju parametara sloma modela betona u vlačnom testu.



Slika 2. Identifikacija parametara vlačnog testa: a) Numerički model; b) MCMC analiza

Postupak identifikacije je napravljen na jednoosnom vlačnom testu pri čemu su identificirane 'posterior' distribucije parametara vlačne čvrstoće i energije loma. U postupak se krenulo s početnim znanjem o navedenim parametrima koje je prikazano 'prior' jednolikom distribucijom. Provedeno je 2000 MCMC simulacija za uspješnu identifikaciju ulaznih parametara modela.

#### Zahvale

Prezentirano istraživanje je financirala Hrvatska zaklada za znanost u sklopu rada na projektu HRZZ-UIP-2020-02-6693 'Metodologija za procjenu parametara u problemima propagacije pukotina nastalih pod utjecajem ekstremnih mehaničkih opterećenja'. Parcijalna financijska potpora dobivena je i projektom Hrvatske vlade i Europske unije iz Operativnog programa kompetitivnosti i kohezije (Projekt KK.01.1.1.02.0027).

#### Literatura

- [1] Xiu, Dongbin; Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach; Princeton University Press; 2010.
- [2] Rosić, B., Kučerová, A., Sýkora, J., Pajonk, O., Litvinenko, A. i Matthies, H.G.; Parameter identification in a probabilistic setting; Engineering Structures, 2013; 50; 179-196.
- [3] Ibrahimbegovic, A.; Nonlinear Solid Mechanics; Solid Mechanics and its Applications 2009;
- [4] Nikolić, M., Karavelić, E., Ibrahimbegovic, A. et al; Lattice Element Models and Their Peculiarities; Arch Computat Methods Eng; 2018; 25(3); 753-784.

- 
- [5] Šodan, M., Nikolić, M. i Stanic, A; Enhanced solid element with embedded strong discontinuity for representation of quasi-brittle failure in mesostructure; In press (2023).
  - [6] Stanic, A., Brank, B., Ibrahimbegovic, A. i Matthies, H.G.; Crack propagation simulation without crack tracking algorithm: Embedded discontinuity formulation with incompatible modes; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2021; 386; 114090.
  - [7] Lisjak, A. i Grasselli, G.; A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses; Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering; 2014; 6(4); 301-314.

# Eksperimentalna i numerička ispitivanja sustava za suhu filtraciju zraka

Pehnec, I.<sup>1</sup>, Jurčević, M.<sup>2</sup> i Bonković, K.<sup>3</sup>

## Sažetak

U radu su predstavljeni rezultati eksperimentalnih mjerenja sustava za filtraciju zraka sa jednim filtrom. Sustav je smješten u laboratoriju za hidrauličke sklopove i mehaniku fluida na sveučilištu u Splitu. Provedena je numerička analiza sustava, a dobiveni rezultati su uspoređeni sa eksperimentalnim mjerenjima. Glavni cilj istraživanja je ispitati mogućnost robusnog predviđanja karakteristika sustava za filtriranje zraka kako bi se omogućilo jednostavnije, brže i ekonomičnije projektiranje filtarskih sustava.

**Ključne riječi:** Suha filtracija zraka, eksperimentalna analiza, CFD analiza

---

<sup>1</sup> **izv. prof. dr. sc. Igor Pehnec**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod sa strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: [ipehnec@fesb.hr](mailto:ipehnec@fesb.hr)

<sup>2</sup> **Mišo Jurčević, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod sa strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: [misjurce@fesb.hr](mailto:misjurce@fesb.hr)

<sup>3</sup> **Klara Bonković**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod sa strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: [klara.bonkovic.00@fesb.hr](mailto:klara.bonkovic.00@fesb.hr)

## 1 Uvod

Sustavi za filtriranje zraka obavezni su industrijskim pogonima, kako bi se umanjio utjecaj na okoliš i onečišćenje zraka. Stoga se teorijski obrađuju načela izdvajanja praha iz plina, kao i svojstva praha i plinova te njihov međusobni utjecaj na različite fizikalne pojave tijekom strujanja zraka kroz sustav [1]. Također se u posljednje vrijeme koriste i numeričke metode kako bi se predvidio rad filtra određenog postrojenja [2], [3]. Numeričke analize u dostupnoj literaturi uglavnom su izrađene za postojeće filter sustave kao kontrola parametara strujanja u sustavu. U industrijskim pogonima projektiranje sustava za filtraciju zraka svodi se na zadovoljavanje zakonskih normi i minimiziranje troškova, što često dovodi do dugoročno većih troškova. Učinkovitost sustava za filtriranje može se pratiti na dvije razine:

- učinkovitost odvajanja čestica – što je definirano poštivanjem zakonskih regulativa (udio čestica u zraku)
- te energetska učinkovitost cjelokupnog sustava (potrošnja električne energije i potrošnog materijala pri održavanju)

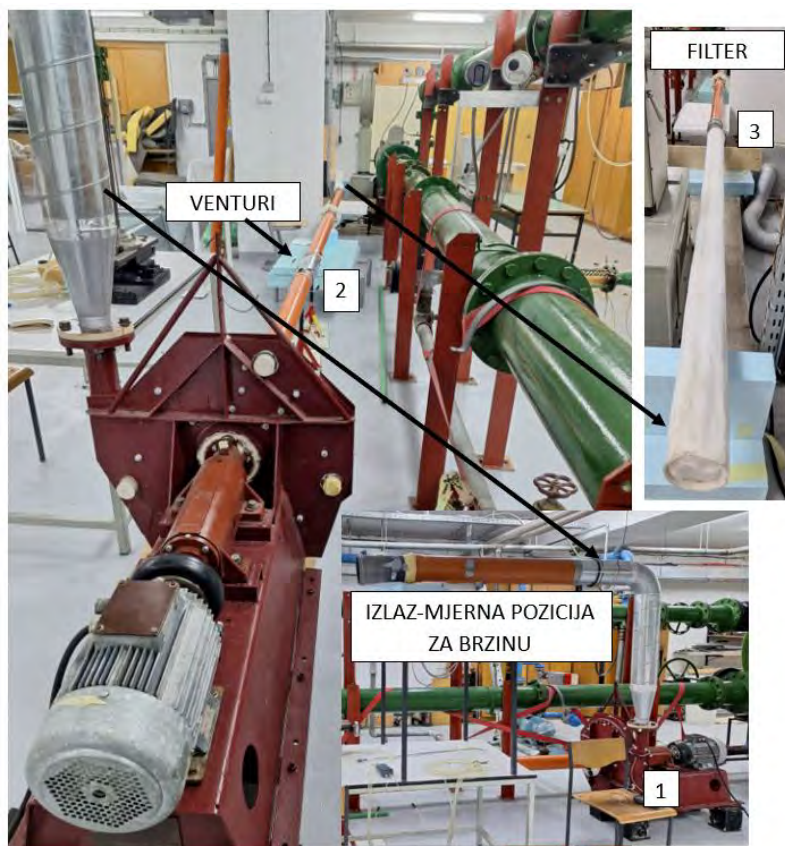
Učinkovitost odvajanja čestica postiže se određivanjem potrebne površine filtra, obzirom na maksimalni volumenski protok. Proizvođači vreća garantiraju minimalne veličine čestica koje se odvajaju za odgovarajuće brzine strujanja u poroznom sloju. Za učinkovito odvajanje čestica, u prljavoj komori brzine strujanja ne bi trebale biti veće od 1.5m/s.

Međutim čestice koje se lijepe za filternu vreću povećavaju razliku tlaka u sustavu, uslijed čega ventilator radi pod većim opterećenjem. Vreće se otrešaju stlačenim zrakom što također utječe kako na potrošnju energije, tako i na vijek trajanja filternih vreća. Stoga je optimizacija sustava filtriranja nužna u koliko se želi povećati učinkovitost odvajanja čestica i smanjiti potrošnja električne energije potrebne za filtriranje. U radu će se predstaviti preliminarni rezultati eksperimentalnih mjerenja i numeričke analize sa krajnjim ciljem određivanja i procjene učinkovitosti sustava za suhu filtraciju zraka.

## 2 Eksperimentalna postavka

Metodologija istraživanja uključuje postavljanje i mjerenje karakteristika sustava sa jednim filtrom, što omogućuje analizu ključnih parametara za sustav filtracije. Ispitni sustav se sastoji od ulaznog cjevovoda prije kojeg je postavljena filterna vreća, venturij cijevi, ventilatora i izlaznog cjevovoda.

Frekvencijskim regulatorom mijenjalo se brzina vrtnje a time i volumenski protoci kroz sustav, te su mjereni padovi tlaka u sustavu. Volumenski protok mjerio se uz pomoć Prantl-Pitot cijev na izlaznom cjevovodu promjera 155mm duljine 2.5m. Položaj Pitot cijevi bio je na udaljenosti od 1.7m u smjeru strujanja od poremećaja (koljena), te 0.8m od izlaznog presjeka. Usisni cjevovod je promjera 103.2mm i ukupne duljine 6.84m. U središnjem dijelu usisnog cjevovoda na duljini 4.24m od filtera nalazi se venturij cijevi kojim se dodatno mjerio volumenski protok. Na ulazni cjevovod postavljen je filter sa karakteristikama prikazanim u tablici 1..



Slika 1. Slika ispitnog sustava sa filter vrećom

Tablica 1. Karakteristike korištenog filtera

Opis	Iznos
Duljina/Promjer filtera	2.5m/0.0617 m
Inicijalni pad tlaka	250 Pa
Kapacitet zadržavanja prašine	400 g/cm <sup>2</sup>
Termalna stabilnost	Do 100 ° C (kratkotrajno do 120 ° C)
Materijal	100% poliester
Zapaljivost	K1/F1
Uporaba	Za grijanje, ventilaciju i hlađenje za poboljšanje kvalitete zraka uklanjanjem neželjenih čestica

Tijekom eksperimenta provedena su sljedeća mjerenja veličine:

1. Protok zraka mjeren je pomoću dva različita mjerna uređaja – Prandtl-Pitot cijevi prema ANSI/ASHRAE standardu, te vlastito izrađenom Venturi cijevi. Protok je ključan parametar koji ukazuje na učinkovitost i kapacitet sustava.
2. Tlak u sustavu mjerio se na nekoliko mjernih mjesta: na izlazu iz filtra kao promjenu tlaka u odnosu na okolni, zatim na venturi cijevi (u cijevi i u grlu), neposredno prije ulaza u centrifugalni ventilator, te na izlazu iz ventilatora.

Kao i volumenski protok, razlika tlaka i brzine na ulazu i izlazu iz ventilatora određuju nam radnu karakteristiku stroja, odnosno prirast totalnog tlaka u ovisnosti o volumenskom protoku.

### 3 Numerička analiza

Provedena je numerička analiza zadanog sustava, te su uspoređeni rezultati sa eksperimentalnim. Jednadžbe koje opisuju strujanje fluida poznate su kao Navier-Stokesove jednadžbe koje su nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) drugog reda [5], [6]. Jednadžbe za nestlačivo strujanje predstavljaju se u obliku zakona očuvanja mase:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \text{odnosno } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

te zakona količine gibanja za infinitesimalni djelić fluida:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2)$$

Ove PDJ jednadžbe se aproksimiraju, odnosno diskretizacijom se svode na skup algebarskih jednadžbi.

Porozna zona modelirana je dodavanjem člana izvora momenta standardnim jednadžbama protoka fluida (Navier-Stokes-ovoj jednadžbi i jednadžbi kontinuiteta). Izraz se sastoji od dva djela: izraz za viskozni gubitak (Darcy, prvi izraz na desnoj strani jednadžbe 3) i izraz inercijskog gubitka (drugi član s desne strane jednadžbe 3). Za oporavak jednostavne homogene porozne medije vrijedi [2]:

$$S_i = -\left(\frac{\mu}{\alpha} v_i + C_2 \frac{1}{2} \rho |v| v_i\right) \quad (3)$$

Koeficijenti  $\alpha$  i  $C_2$  određeni su iz specifikacije filtera prema uputama ANSYS maunala kako bi se osiguralo njihovo točno izračunavanje za potrebe simulacije. Pri velikim brzinama protoka, konstanta  $C_2$  predstavlja ispravak za unutrašnje gubitke poroznog sloja, te se naziva inercijski faktor otpora i iznosi  $C_2 = 89087$ , dok je premabilnost  $\alpha$ , odnosno parametar potreban za numeričku simulaciju  $\frac{1}{\alpha} = 3092404654$ . Ovi faktori usvojeni su za modeliranje porozne zone pri numeričkoj simulaciji u programskom paketu ANSYS FLUENT prema uputama proizvođača filtera vreća, što će se i provjeriti usporedbom numeričkih rezultata i provedenim eksperimentom. Broj elemenata numeričke simulacije iznosio je 5706000, uz rubne uvjete koji su definirani kao ulaz, izlaz i porozna zona. Za ulaz u sustav označen je sam filter na kojemu je zadan atmosferski

tlak, izlaz iz sustava predstavlja površinu ispred ventilatora na kojoj je postavljen izmjereni tlak (iako to nije stvarni kraj sustava za numeričku simulaciju ta površina je usvojena jer je cilj bio validiranje eksperimentalno analizirane porozne zone odnosno filtera. Validacija eksperimenta je napravljena uz pomoć tri ispitne točke koje se nalaze između filtera i ventilatora tako da ostatak sustava nije imao značajan utjecaj, te filtera koji je definiran kao porozna zona. U ovakvim analizama važno je naglasiti da je najčešće potrebno definirati samu domenu koja predstavlja atmosferski zrak koji nastrujava na sam filter.

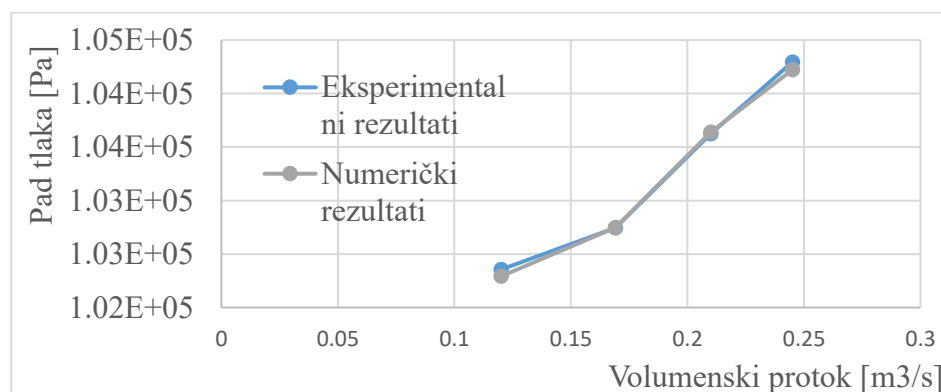
## 4 Rezultati

Provedena su eksperimentalna mjerenja i numeričke simulacije za četiri volumenska protoka, a rezultati su prikazani u tablici 2:

Tablica 2. Rezultati mjerenja (Pad tlaka i volumenski protoci)

Volumenski protok [m <sup>3</sup> /s]	Eksperimentalni rezultat-pad tlana Venturi [Pa]	Numerički rezultat-pad tlaka Venturi [Pa]	Esperimentalni rezultat-tlak ispred filtera [Pa]	Numerički rezultat-tlak ispred filtera [Pa]
0.25	-5770	-6150.45	-2970	-2897.61
0.21	-4310	-4931.37	-2300	-2315.67
0.17	-2600	-2315.67	-1420	-1422.53
0.12	-1840	-2094.722	-1030	-966.177

U nastavku je prikazan dijagram usporedbe eksperimenta sa numeričkom simulacijom za pad tlaka na vreći:



Slika 2. Dijagram usporedbe rezultata

Iz dijagrama prikazanog na slici 2. može se uočiti da se eksperimentalni podaci jako dobro poklapaju s dobivenim rezultatima numeričke simulacije što ukazuje na ispravno modeliranje

porozne zone u programskom paketu ANSYS, odnosno dobro definiranim koeficijentima inercijski faktor otpora  $C_2$  i permeabilnost  $\alpha$ .

## 5 Zaključak

Rezultati mjerenja ukazuju nam na karakteristike vrećastog filtera odnosno pad tlaka u filteru u ovisnosti o volumenskom protoku. Parametri filtera vreće, permeabilnost i inercijski faktor otpora, izračunati iz specifikacija filtera poslužili su za ispravno modeliranje porozne zone u programskom paketu ANSYS. S rezultatima u kojima je ostvareno poklapanje eksperimentalnog i numeričkog djela ukazano je da je numerička simulacija ispravno postavljena te je omogućeno da se u danjem istraživanju uz pomoć izmjerenih podataka o padu tlaka i ispravno postavljenoj simulaciji numerički validiraju isti kako bi se pružio uvid o utjecaju parametara koji karakteriziraju filter vreću na rezultate. Ovakav način daljnje numeričke validacije potrebno je napraviti kako bi se mogla znati točnost rezultata numeričke simulacije prije izvedbe eksperimenta. Numerička simulacija omogućuje nam dobra predviđanja parametara strujanja, ali i učinkovitosti pri izmjeni geometrije komora filtra.

Ograničenja modela za numeričku simulaciju poroznog sloja odnose se na model koji predviđa pad tlaka u poroznom sloju, ali ne predviđa povećanje brzine u kapilarama kroz porozni sloj.

Srednju brzinu kroz cijeli porozni sloj možemo odrediti korištenjem jednadžbe kontinuiteta preko poznatih parametara površine filterarskog sredstva i volumenskog protoka.

U konačnici, eksperimentalna mjerenja sustava filtracije s ventilatorom, cjevovodom pružilo je vrijedne podatke o performansama sustava i njegovoj sposobnosti filtracije čestica iz zraka. Ti rezultati mogu poslužiti kao temelj za daljnje poboljšanje sustava filtracije zraka vrećastim filtrima.

## Literatura

- [1] Buljan, T.; Tehnike pročišćavanja dimnih plinova teorija i praksa; Ekoing d.o.o.; 2016., Zagreb.
- [2] ANSYS Inc; "ANSYS (computer program)." 2023; Ansys Inc.
- [3] Solari, F.; Tagliavini, G. ; Montanari, R.; Bottani, E, Malagoli, N. i Armenzoni, M.; CFD model validation of a bag filter for air filtration in a milling plant; Proceedings of the International Food Operations and Processing Simulation Workshop; 2017; ISBN 978-88-97999-86-7; Bruzzone, Longo and Vignali Eds.
- [4] ASHRAE STANDARD-Measurement, Testing, Adjustig, and Balancing of Building HVAC System.
- [5] White, F.M. i Majdalani, J. ; Viscous Fluid Flow; McGraw Hill; 2022; ISBN 978-1-260-59780-6.
- [6] Anderson, J.D.; Computational Fluid Dynamics; The Basic with Applications; McGraw Hill; 1995; ISBN 0-07-001685-2.



# Višerazinsko modeliranje procesa rupičenja metodom faznog polja

Polančec, T.<sup>1</sup> i Lesičar, T.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu predstavljen je novi numerički okvir za modeliranje zamornog procesa oštećenja zupčanika, rupičenja, metodom faznog polja. Rupičenje je razmatrano na sinteriranom čeliku Astaloy Mo+0.2C gustoće  $6.5 \text{ g/cm}^3$  koji se sastoji od heterogene mikrostrukture ferita, bainita i pora. Mikrostruktura materijala je modelirana pomoću metode DNS (direktne numeričke simulacije) na reprezentativnom volumenskom elementu (RVE). Materijalni parametri zrna mikrostrukture određeni su eksperimentalno. Numeričke simulacije su provedene pomoću softverskog paketa ABAQUS.

**Ključne riječi:** rupičenje, zupčanici, phase-field, mikrostruktura, sinterirani čelik

---

<sup>1</sup> **Tomislav Polančec, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tpolancec@fsb.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tlesicar@fsb.hr

## 1 Uvod

Zamor uslijed klizno-valjnog kontakta (RCF) uzrokuje oštećenje materijala pri kojem dolazi do inicijacije i propagacije pukotine. Karakterizira ga promijenljivo stanje naprezanja ispod površine materijala kao posljedica ciklusa opterećivanja elemenata strojeva u radu uslijed klizno-valjnog kontakta. U elemente strojeva podvrgnute klizno-valjnom kontaktu su ležajevi, zupčanci, željeznička pruga, itd..

Najčešći zamorni mehanizmi oštećenja koji se javljaju tijekom opterećivanja klizno-valjnim kontaktom su trošenje i rupičenje [1]. Rupičenje se dijeli na površinski i ispod-površinski inicirano rupičenje, a u ovom radu razmatran je proces ispodpovršinski iniciranog rupičenja. Površinski inicirano rupičenje nastaje kao posljedica hrapavosti površine, dok ispodpovršinski inicirano rupičenje nastaje u uvjetima pravilnog podmazivanja i kvalitetne obrade strojnih elemenata. Pukotina nastaje na mjestu najvećeg posmičnog naprezanja ispod površine materijala i raste prema slobodnim površinama [2]. Kada dođe do odvajanja dijela materijala, nastaje rupičenje.

U ovom radu proces rupičenja je modeliran numerički integracijom metode faznog polja u metodu konačnih elemenata pomoću programskog paketa ABAQUS i programskog jezika FORTRAN.

## 2 Metoda faznog polja

U posljednjem desetljeću metoda faznog polja je jedna od najpopularnijih metoda za modeliranje zamornog ponašanja materijala. Za razliku od prethodno popularnih diskretnih metoda, metoda faznog polja se svrstava u difuzne metode. Problem opisivanja kompleksnih i numerički zahtjevnih pukotina je u metodi faznog sloja riješen modeliranjem oštećenja pomoću difuznog sloja unutar kojega se nalazi degradirani materijal. Metoda je bazirana na minimiziranju funkcionala unutarnje energije [3]:

$$\Psi(\varepsilon^e, \varepsilon^p, \phi, \bar{\psi}) = \int_{\Omega} \{g(\phi)[\psi_e^+(\varepsilon^e) + \psi_p^+(\varepsilon^p)] + \psi_e^-(\varepsilon^e)\} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{F}(\bar{\psi})\psi_c[2\phi + l|\nabla\phi^2|] d\Omega \quad (1)$$

Detaljnije objašnjenje funkcionala je prikazano u [4]. Metoda faznog polja pomoću skalarne varijable omogućuje glatki prijelaz između potpuno degradiranog  $\phi = 1$  i potpuno nedegradiranog materijala  $\phi = 0$ . Pomoću varijable faznog polja  $\phi$  određuje se vrijednost degradacijske funkcije koja u ovom radu glasi:

$$g(\phi) = (1 - \phi)^2 \quad (2)$$

dok je za zamornu degradiranu funkciju odabran oblik:

$$\hat{F} = \left(1 - \frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_{\infty}}\right) \text{ za } \bar{\psi} \in [0, \bar{\psi}_{\infty}] \quad (3)$$

Za ugradnju metode faznog polja u metodu konačnih elemenata korišten je algoritam s 3 mreže konačnih elemenata, razvijen od strane Seleša i ostalih. Detaljniji opis algoritma dan je u [4].

### 3 Modeliranje opterećenja

Kao što je spomenuto u uvodu, zupčanici se svrstavaju u RCF strojne elemente. Za RCF strojne elemente u literaturi se najčešće računa raspodjela kontaktnog tlak u smjeru normale prema Hertzovoj teoriji [5]:

$$p(x) = \frac{2F_N}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - x^2} \quad (4)$$

gdje  $F_N$  predstavlja silu u smjeru normale po jedinici širine, dok  $b$  predstavlja pola širine kontakta dva tijela u interakciji. Raspodjela trenja računa se prema Coulombovom zakonu trenja [5]:

$$q = \mu p(x) \quad (4)$$

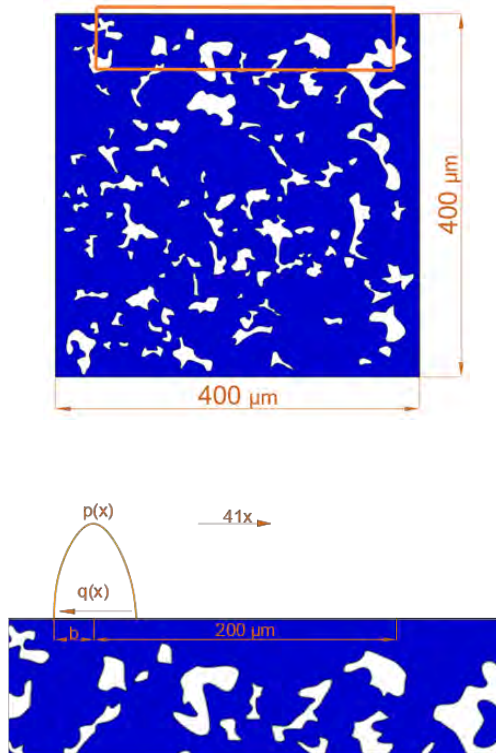
gdje je  $\mu$  koeficijent trenja između površina u kontaktu.

S obzirom da u klizno-valjnom kontaktu dva strojna elementa dolazi do više točaka opterećenja, potrebno je uzeti u obzir određeni broj točaka opterećenja uz razmatranu, kako bi se vidio njihov utjecaj na razmatrano mjesto opterećenja. Kako bi modelirali tu pojavu, potrebno je uzeti u obzir više konfiguracija opterećenja (tzv. *putujuće opterećenje*) [1].

### 4 Numeričko modeliranje procesa rupičenja

Za numeričko modeliranje procesa rupičenja na RCF strojnim elementima korišten je materijal Astaloy Mo+0.2C gustoće  $6.5 \text{ g/cm}^3$ . Razmatrani materijal se na mikrorazini sastoji od ferita, bainita i pora. Materijalni parametri ferita i bainita uzeti su iz istraživanja prikazanih u [6]. Razmatrano je samo elastično ponašanje materijala.

Opterećenje je modelirano pomoću 41 konfiguracije opterećenja kao što je predloženo u [7]. Zamorno ponašanje materijala razmatrano je u programskom paketu ABAQUS, pomoću troslojnog algoritma faznog polja [4]. Opterećenje je modelirano u korisničkim rutinama DLOAD i UTRACLOAD. Na slici 1 prikazana je geometrija razmatranog reprezentativnog volumenskog elementa i konfiguracija opterećenja. Slika 2 prikazuje mikrostrukturu RVE-a i proces formiranja rupičenja. U tablici 1 prikazani su materijalni parametri i parametri faznog polja dok su u tablici 2 prikazani parametri opterećenja.



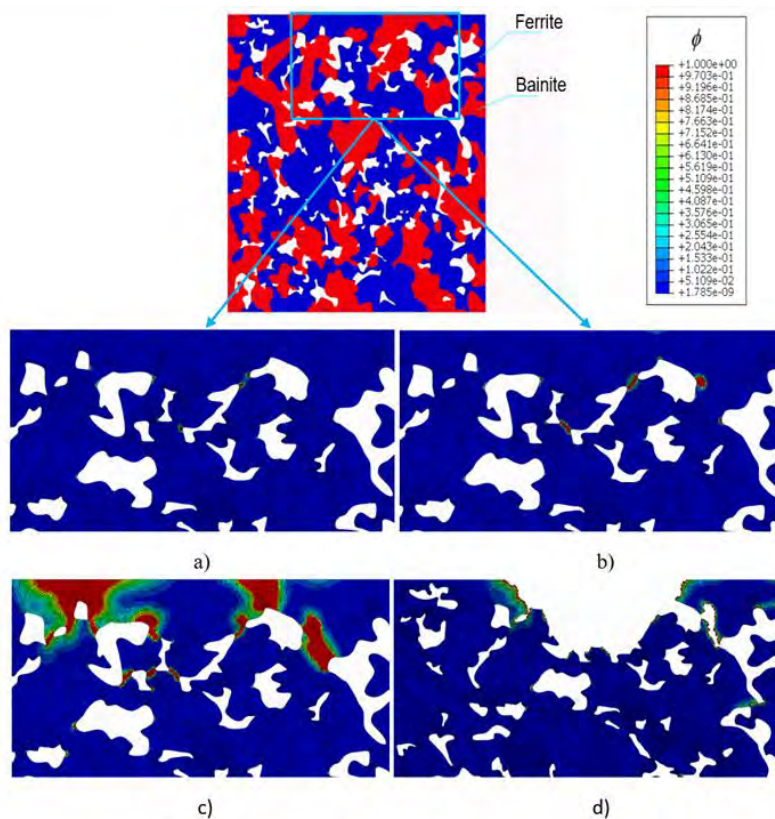
Slika 1. Geometrija reprezentativnog volumenskog elementa (RVE) i konfiguracija opterećenja

Tablica 1. Materijalni parametri i parametri faznog polja

Opis	Iznos	Jedinice
Youngov modul elastičnosti ferita	185000	N/mm <sup>2</sup>
Poissonov faktor ferita	0.28	-
Youngov modul elastičnosti bainita	238000	N/mm <sup>2</sup>
Poissonov faktor bainita	0.28	-
Lomna žilavost ferita	1.5	N/mm
Lomna žilavost bainita	0.45	N/mm
Parametar širine difuznog sloja	0.003	mm
Zamorni parametar	20	MPa

Tablica 2. Materijalni parametri i parametri faznog polja

Opis	Iznos	Jedinice
Maksimalni kontaktni pritisak	2000	N/mm <sup>2</sup>
Faktor trenja	0.05	-
Pola širine kontakta	0.4	mm



Slika 2. Proces formiranja ispodpovršinski iniciranog rupičenja kroz cikluse opterećivanja:  
a) 66 ciklusa b) 76 ciklusa c) 105 ciklusa d) 105 ciklusa

## 5 Zaključak

U radu je prezentiran novi numerički okvir za modeliranje procesa rupičenja uzimajući u obzir mikrostrukturu sinteriranog materijala Astaloy Mo+0.2C gustoće  $6.5 \text{ g/cm}^3$ . Opterećenje zupčanika je modelirano pomoću putujućeg opterećenja s 41 konfiguracijom. Raspodjela kontaktnog tlaka u smjeru normale računata je pomoću Hertzove teorije, dok je raspodjela sile trenja računata pomoću Coulombovog zakona trenja.

Na slici 2 je vidljivo nastajanje rupičenja. Pore uzrokuju koncentraciju naprezanja u materijalu, povezuju se, šire prema slobodnoj površini i odvajaju dio materijala. Rupičenje se javlja nakon 105 ciklusa opterećivanja. Na slici 2d) uključena je opcija brisanja elemenata kako bi se jasnije vidio odvojeni dio materijala i nastalo rupičenje.

## Literatura

- [1] Fajdiga, G., Glodež, S. i Kramar, J; Pitting formation due to surface and subsurface initiated fatigue crack growth in contacting mechanical elements; *Wear*; 2007; 262:1217–24. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2006.11.016>.
- [2] Longching, C., Qing, C. i Eryu, S.; Study on initiation and propagation angles of subsurface cracks in GCr15 bearing steel under rolling contact; *Wear*; 1989; 133:205–18. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0043-1648\(89\)90036-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0043-1648(89)90036-7).
- [3] Seleš, K., Aldakheel, F., Tonković, Z., Sorić, J. i Wriggers, P.; A general phase-field model for fatigue failure in brittle and ductile solids; *Comput Mech*; 2021; 67:1431–52. <https://doi.org/10.1007/s00466-021-01996-5>.
- [4] Seleš, K., Lesičar, T., Tonković, Z. i Sorić, J.; A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture; *Eng Fract Mech*; 2019; 205:370–86. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.09.027>.
- [5] Johnson, K.L.; *Contact Mechanics*; 223; Cambridge university press; 1987. <https://doi.org/10.1201/b17110-2>.
- [6] Tomić, Z., Gubeljak, N., Jarak, T., Polančec, T. i Tonković, Z.; Micro - and macromechanical properties of sintered steel with different porosity; *Scr Mater*; 2022;217:114787. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2022.114787>.
- [7] Walvekar, A.A., Paulson, N., Sadeghi, F., Weinzapfel, N., Correns, M. i Dinkel, M. A.; New Approach for Fatigue Damage Modeling of Subsurface-Initiated Spalling in Large Rolling Contacts; *J Tribol*; 2017; 139. <https://doi.org/10.1115/1.4033054>.

## Odjel za mehaničke proračune Tvornice generatora Rade Končar u Zagrebu – I. dio

Pustaić, D.<sup>1\*</sup> i Bonačić, F.<sup>2</sup>

### Sažetak<sup>+</sup>

U članku se daje pregled aktivnosti u tehničkom uredu tvornice generatora Rade Končar u Zagrebu. Obuhvaćeno je razdoblje od pedesetih godina prošloga stoljeća, tj. od početka velike industrijalizacije i obnove nakon Drugoga svjetskoga rata pa sve do dvadesetih godina ovoga stoljeća. Posebna pozornost posvećena je Odjelu za mehaničke proračune u kojemu je i sam autor radio od 1974. do 1979. godine. Zaposlenici u Odjelu bavili su se proračunima čvrstoće, dinamike i vibracija električnih rotacijskih strojeva kao što su hidrogenatori, turbogeneratori, veliki elektromotori te specijalnih inženjerskih konstrukcija. Do devedesetih godina prošloga stoljeća primjenjivane su analitičke metode temeljene na mjerenjima na izgrađenim generatorima, da bi se nakon toga perioda sve više počele koristiti i numeričke metode, posebno metoda konačnih elemenata.

Cjeloviti rad podijeljen je u dva dijela, jer bi sadržaj jednoga članka bio preopširan. U prvom članku obuhvaćena je: struktura tehničkog ureda te konstrukcija i mehanički proračun hidrogenatora i turbogeneratora, dok će drugi rad obuhvatiti konstrukciju i mehanički proračun velikih elektromotora, proračun specijalnih inženjerskih konstrukcija, konstrukciju vjetroagregata, primjenu metode konačnih elemenata u mehaničkim proračunima, kadrovsku problematiku u Odjelu i suradnju s tehničkim fakultetima Sveučilišta u Zagrebu.

**Ključne riječi:** Odjel za mehaničke proračune; električni rotacijski strojevi; hidrogenator; turbogenerator; analitičke metode; mjerenje mehaničkih i toplinskih parametara.

<sup>+</sup> članak je u sažetom obliku i bez slika i tablica uvršten u integralni tekst u knjizi *Povijest tehničke i primijenjene mehanike*, autora Ive Alfrevića, koja će biti tiskana i objavljena u izdanju Sveučilišta u Zagrebu, Fakulteta strojarstva i brodogradnje, 2023. godine.

\* sveučilišni profesor u mirovini.

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Dragan Pustaić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: draganpustaic@fsb.hr

<sup>2</sup> **Filip Bonačić, univ. spec., dipl. ing. stroj.**, Končar, Generatori i Motori d.o.o. – GiM, Fallerovo šetalište 22, 10 000 Zagreb, e-mail: filip.bonacic@gmail.com

## 1 Uvod

Nakon Prvoga svjetskoga rata u prošleme stoljeću, točnije 1921. godine, osnovano je poduzeće *Rade Končar* u Zagrebu, na Fallerovom šetalištu 22 mada ne, odmah u početku, pod tim imenom. U početku su to bile elektrotehničke radionice za popravak i održavanje električne opreme i uređaja koje su radile u sklopu njemačkoga koncerna *Siemens*. Na ovim prostorima takvih radionica prije nije bilo pa su one predstavljale novi iskorak u smislu začetka nove industrijalizacije u prilično siromašnoj i nerazvijenoj agrarnoj zemlji. Po završetku Drugoga svjetskoga rata, točnije 1946. godine, trebalo je žurno započeti s elektrifikacijom ratom opustošene zemlje (FNR Jugoslavije). Krenulo se, takoreći, od nule, a trebalo je izgraditi nove tvornice za proizvodnju elektroenergetske opreme i transporta. Svojim znanjem i tehničkim rješenjima u prvim godinama nakon rata, nemjerljiv doprinos dala je njemačka elektroindustrija okupljena u velikom koncernu *Siemens*. Tako su osnovane: tvornica generatora, tvornica srednjih električnih strojeva, tvornica malih motora, tvornica transformatora, tvornica lokomotiva itd., a nedugo nakon toga 1961. godine, osnovan je i Elektrotehnički institut *Rade Končar* s ciljem da se mogu provoditi znanstvena istraživanja čiji bi se rezultati primijenili u razvoju novih proizvoda i novih tehničkih i tehnoloških rješenja.

Posebno je za inženjere strojarstva bila izazovna Tvornica generatora u kojoj su se gradili veliki električni rotacijski strojevi kao što su hidrogenatori, turbogeneratori te veliki elektromotori. Gradnja tih velikih električnih strojeva zahtijevala je rješavanje kompleksnih inženjerskih problema kao što su uravnoteženje rotora, problemi vibracija i čvrstoće, problemi hlađenja i ventilacije statorskoga i rotorskoga namota, podmazivanje i hlađenje velikih radijalno-aksijalnih ležajeva itd. Sve je to zahtijevalo suradnju stručnjaka različitih profila s dobrim i odličnim poznavanjem same konstrukcije stroja, osnova elektrotehnike, mehanike i vibracija, termodinamike, mehanike fluida, elemenata strojeva itd. Sve te djelatnosti odvijale su se u Tehničkom uredu Tvornice generatora koji je u vrijeme najveće aktivnosti (1970.–1990.) zapošljavao više od 120 djelatnika koji su svi radili u jednoj velikoj i lijepo uređenoj prostoriji. Tada se govorilo da je to najveći i po tehničkoj opremljenosti najmoderniji tehnički ured na prostorima bivše SFR Jugoslavije, uređen na istovjetan način kao slični uredi u SAD-u.

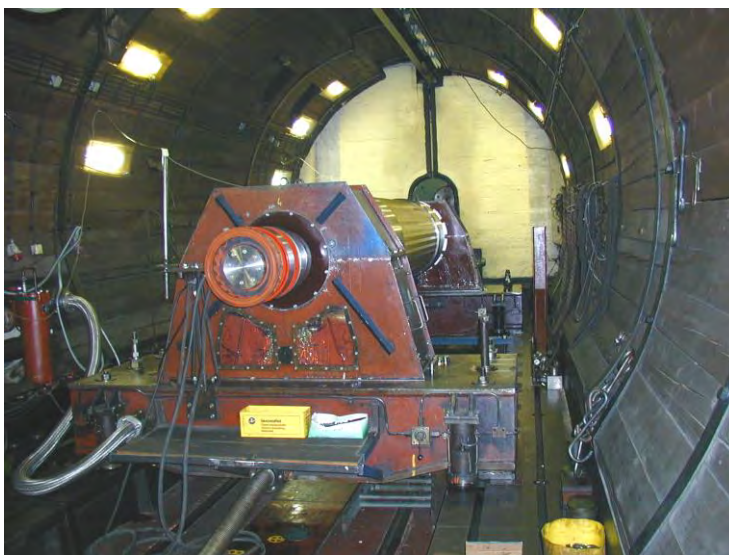
## 2 Struktura tehničkog ureda Tvornice generatora

Cjelokupna djelatnost Tehničkoga ureda odvijala se u nekoliko zaokruženih (cjelovitih) grupa, odnosno odjela. Osnovne grupe bile su: konstrukcija hidrogenatora, konstrukcija turbogeneratora, konstrukcija velikih elektromotora, odjel za proračun elektromagnetskog polja, odjel za mehaničke proračune, odjel za konstrukciju i proračun kliznih ležajeva i odjel za standardizaciju. U nabavci materijala za izradu turbo- i hidrogenatora Tehnički je ured svakodnevno surađivao s *Laboratorijem za ispitivanje mehaničkih svojstava materijala*. U to vrijeme voditelji grupa u laboratoriju bili su inženjeri: Hrvoje Faist i Vladimir Nemarnik. Ispitivala su se mehanička i fraktomehanička svojstva materijala, kao npr. vlačna, tlačna i smična čvrstoća, istezljivost, tvrdoća, žilavost, pukotinska žilavost itd. Svakodnevno se surađivalo i s *Kemijskim laboratorijem* te s *Laboratorijem za antikorozijsku zaštitu*.

Također, ured je svakodnevno surađivao i s Ispitnom stanicom koja je bila u sastavu Tvornice generatora i u kojoj su vodeći inženjeri bili: Teo Busti i Miloš Rašeta. Naime, svaki turbogenerator se prije isporuke morao ispitati na brzinu teorijskog pobjega da se utvrdi da je



siguran i pouzdan i pri tome broju okretaja, slika 1. Istu proceduru „vitlanja“ u ispitnoj stanici prolazili su i brzohodni vertikalni hidrogeneratori manjih promjera (do cca 5 m), dok su se sporohodni hidrogeneratori velikih promjera ispitivali nakon montaže, a prije puštanja u pogon, direktno na hidroelektrani. Odjel za mehaničke proračune u Tehničkom uredu Tvornice generatora tijesno je surađivao sa sektorom za ispitivanje električnih rotacijskih strojeva u Institutu. Ta grupa bavila se ispitivanjima buke i vibracija na novim tipovima strojeva koji su upravo razvijeni i čije performanse je trebalo ispitati. Treba istaknuti da su oni razvijali eksperimentalne metode mjerenja buke i vibracija, a paralelno su razvijali i metode za numeričku simulaciju pojedinih procesa i metoda za analizu. Taj laboratorij u Institutu „Rade Končar“ imao je vrlo kvalitetnu, skupocjenu i raznovrsnu mjernu opremu i stalno se nabavljala nova i još sofisticiranija oprema od poznatih i renomiranih svjetskih proizvođača opreme kao što su npr. Bruel & Kjaer, Hewlett Packard, Bently Nevada, itd. Rezultati mjerenja direktno su se primjenjivali u konstrukciji hidrogeneratora, turbogeneratora, velikih elektromotora i drugih specijalnih inženjerskih konstrukcija tako da se s konstruktorima dogovarala i sugerirala promjena pojedinih konstrukcijskih rješenja (njihova oblika i dimenzija). Voditelj grupe bio je dr. sc. Goran Pavić, a ostali suradnici bili su: Goran Orešković, Boris Meško, Nikiša Maljković, Hinko Wolf i još brojni drugi koje je nemoguće ovdje sve pobrojati.

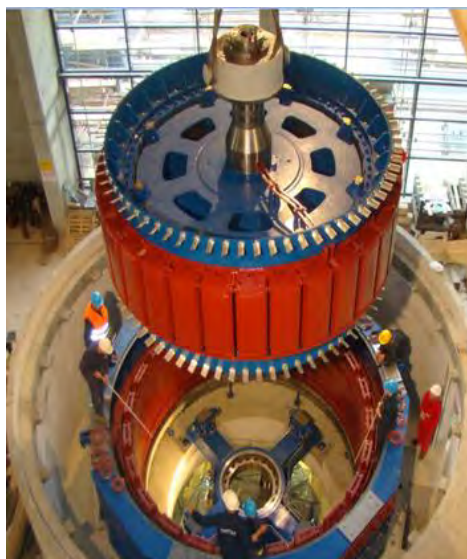


Slika 1. Turborotor u ispitnoj stanici, u jami, pripremljen za ispitivanje (vitlanje).

### 3 Opis rada u Odjelu za proračun elektromagnetskog polja i u Odjelu za mehaničke proračune

Kako je funkcionirao Odjel za mehaničke proračune u Tehničkom uredu Tvornice generatora i čime se on zapravo bavio? Kada se potpisao tender za novi hidrogenerator za neku hidrocentralu u SFR Jugoslaviji, ili bilo gdje u svijetu, onda su u *Odjelu za proračun elektromagnetskog polja*, na osnovi snage, broja okretaja, magnetske indukcije, jakosti magnetske indukcije, jakosti struje,

napona, gubitaka u zračnom rasporu itd., definirali osnovne geometrijske parametre stroja kao što su: tip stroja, promjer osovine, broj i razmještaj ležajeva, promjer i dužina rotora i statora, duljine i poprečni presjeci bakrenih štapova rotora i statora, broj polova rotora itd. Ti osnovni podaci se potom predaju u Odjel za konstrukciju hidrogeneratora te u Odjel za konstrukciju i proračun velikih kliznih ležajeva. Konstruktori sada konstruiraju i oblikuju sve vitalne dijelove generatora, kako rotora tako i statora i detaljno razrađuju svaki konstrukcijski element. Na slikama 3 i 4 dan je presjek vertikalnoga sinkronoga generatora s istaknutim polovima, gdje su vidljive sve komponente jednoga takvoga velikog rotacijskog stroja. Kako konstruktori nemaju vremena za detaljne proračune čvrstoće tih elemenata, pogotovo ne za njihovo *dimenzioniranje*, oni tijesno surađuju s *Odjelom za mehaničke proračune*, u kojemu se onda provode detaljni i vrlo precizni proračuni čvrstoće, krutosti i stabilnosti svih vitalnih dijelova rotora i statora hidrogeneratora. O rezultatima proračuna Odjel izvješćuje konstruktore koji onda korigiraju konstrukciju pa slijedi novi proračun pa opet korekcija konstrukcije i tako taj proces iterativno traje sve dok se ne dođe do konačnog konstrukcijskog rješenja te dok se ne zadovolje uvjeti čvrstoće, krutosti i stabilnosti.

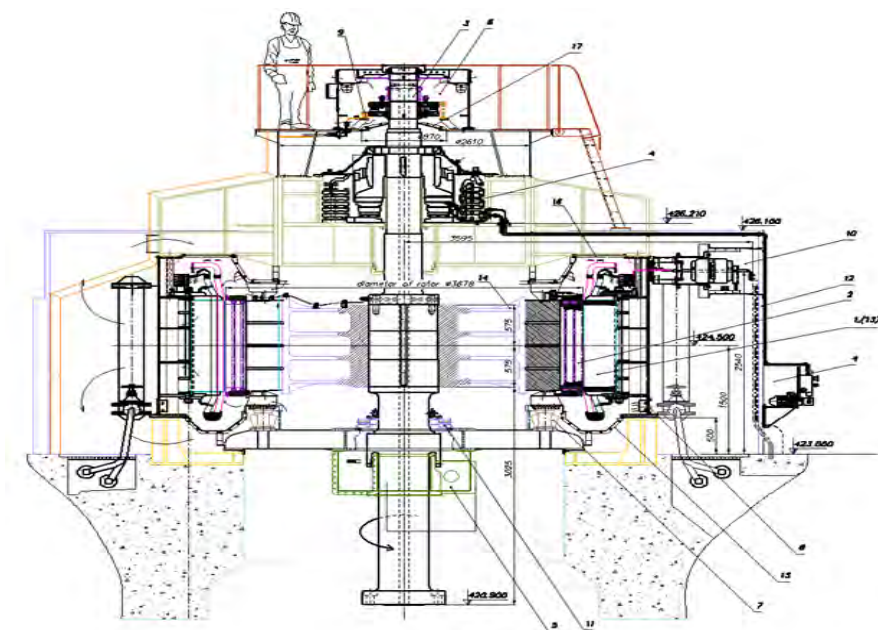


Slika 2. Ulaganje rotora vertikalnoga hidrogeneratora u stator s ciljem ispitivanja: veličine zračnog raspora i *vitlanja* kod brzine teorijskog pobjega.

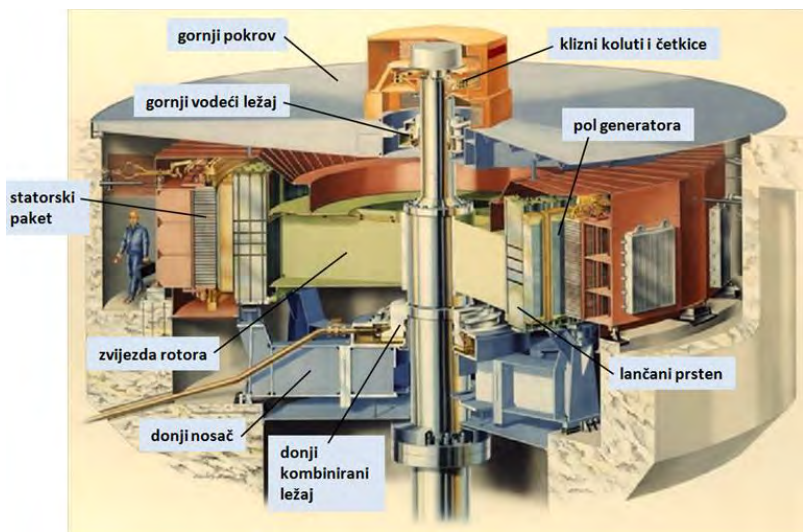
### 3.1 Mehanički proračun hidrogeneratora

Vitalni elementi rotora i statora koji su se proračunavali bili su npr.: osovina, vratilo, glavina, zvijezda rotora, slika 5, lamelirani lančani prsten, učvršćenja polova (lastin rep, T-noga, dvostruka T-noga, kombinacija: lastin rep – čekić, itd.), rotorski i statorski namot, krajnja polna ploča, svornjaci i klinovi za pritezanje i učvršćenje lamelirane jezgre polova, glavni zvjezdasti nosač rotora generatora, kućište statora itd. Posebna pozornost posvećivala se *krutosti* glavnog

zvjezdastog nosača rotora generatora. To je bilo važno zbog toga što je ta krutost neposredno utjecala na vlastite kružne frekvencije vertikalnih (aksijalnih) vibracija hidroagregata i s druge strane, na veličinu zračnih raspora u brtvama vodne turbine. Na slikama 3 i 4 prikazan je uzdužni presjek rotora vertikalnog generatora s istaknutim polovima.



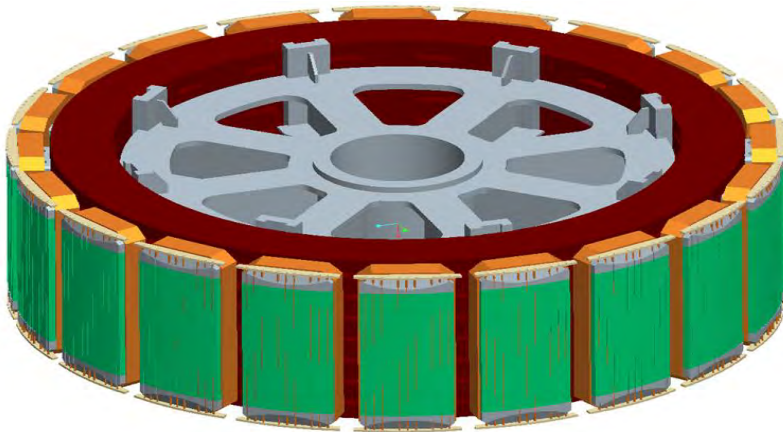
Slika 3. Konstrukcija vertikalnog hidrogenatora s istaknutim polovima. Na slici su vidljivi svi najvažniji elementi generatora, [11].



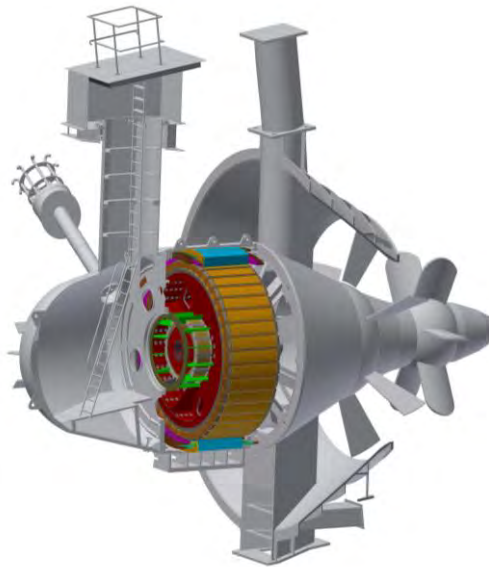
Slika 4. Presjek vertikalnog hidrogenatora s istaknutim polovima, oznaka: S 4397 - 22,

snaga: 31,45 MW, frekvencija:  $f = 60$  Hz,  $n_n = 327,27$  min<sup>-1</sup>,  $n_p = 580$  min<sup>-1</sup>, [11].

Osim *proračuna čvrstoće* u Odjelu su se izvodili i *dinamički proračuni* koji su trebali definirati osnovne parametre pri upuštanju agregata u rad te pri njegovu zaustavljanju. Isto tako se analizirala *dinamička stabilnost gibanja rotora* uzimajući u razmatranje i utjecaj *giroskopskih efekata* na gibanje rotora, ovisno o tipu konstrukcije i razmještanju ležajeva. Velika pozornost posvećivala se i analizi *vibracija hidrogenatora*, odnosno *hidroagregata* (generator + vodna turbina). Kod vertikalnih hidroagregata redovito su se analizirale aksijalne vibracije, naročito kod *reverzibilnih agregata*, zbog utjecaja aksijalne sile na veličinu vlastite kružne frekvencije. Isto tako, računale su se *vlastite kružne frekvencije (kritični brojevi okretaja)* i *forme vibriranja* kod fleksijskih i torzijskih vibracija.



Slika 5. Rotor generatora: zvijezda rotora, lančani prsten i polovi s namotom, [11].



Slika 6. Cijevni generator instaliran u HE Dubrava, na rijeci Dravi, nedaleko od Varaždina.

Kako bi istaknuli višegodišnji kontinuitet u proizvodnji električnih generatora u Tvornici generatora *Rade Končar* u Zagrebu koji su isporučeni i pušteni u pogon u SFR Jugoslaviji, Republici Hrvatskoj i drugdje širom svijeta, navest ćemo neke od elektrana: HE Đerdap, HE Senj, HE Vinodol, HE Shiroro, HE Kamburu, HE Hadita, HE Mratinje, Dravske elektrane, HE Soča, HE Zakućac, RHE Obrovac, HE Dubrava, HE Gojak, HE Ličko Lešće itd. U Tablici 1 prikazano je nekoliko hidroelektrana na kojima su instalirani generatori koji su proizvedeni u tvornici Rade Končar u Zagrebu. Navedene su osnovne karakteristike generatora kao što su: zemlja, godina izgradnje, tip generatora, snaga, sinkroni broj okretaja, frekvencija, broj polova, promjer osovine, broj ležajeva i tip ležaja (radijalni, radijalno-aksijalni), jakost struje, napon itd.

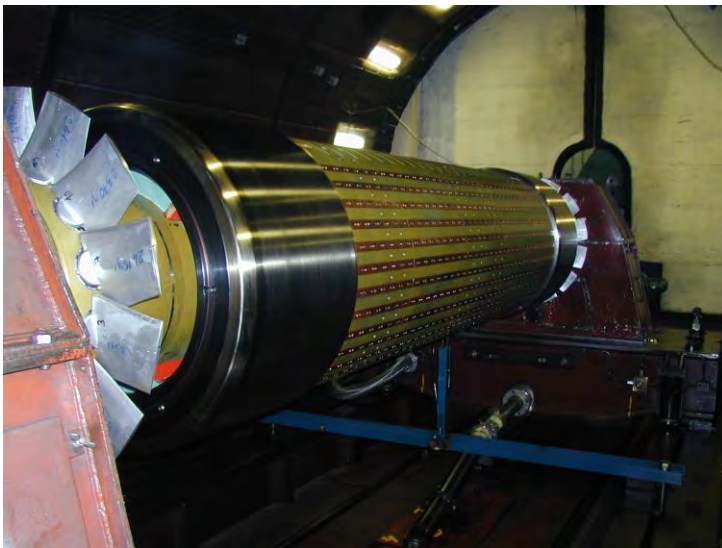
Tablica 1. Hidroelektrane na kojima su instalirani generatori proizvedeni u tvornici *Rade Končar* u Zagrebu. U tablici su navedene osnovne karakteristike generatora.

	HE Lešće	HE Mostar. blato	HE Zlatoličje	HE Gojak	HE Zakućac	CHE Fužine	HE Doblar 1	HE Toro 3
Država	HR	BiH	SLO	HR	HR	HR	SLO	Costa Rica
Pušten u pogon	2010.	2010.	1. g.1968. 2. g.1969.	1959., 2019.	1961./1980. 2013.- 2017.	1957. 2017.	1939. 2014.	2013.
Tip generatora	vertik., 2 ležaja	vertik., 2 ležaja	bez lež.- gljiva izv.	vertik. 2 ležaja	vertik., 2 ležaja	vertik., 2 ležaja	vertik., 2 ležaja	vertik., dva ležaja
Snaga	25000 kVA	35300 kVA	85000 kVA	25000 kVA	160000 kVA	4,5MW /6,5MW	16000 kVA	29700 kVA
Faktor snage	0,85	0,85	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
Broj okretaja	187,5 min <sup>-1</sup>	500 min <sup>-1</sup>	125 min <sup>-1</sup>	428,6 min <sup>-1</sup>	333,3 min <sup>-1</sup>	428,6 min <sup>-1</sup>	300 min <sup>-1</sup>	600 min <sup>-1</sup>
Frekvencija	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz	50 Hz	60 Hz
Broj polova	32	12	48	14	18	14	20	12
Brzina pri pobjegu	360 min <sup>-1</sup>	900 min <sup>-1</sup>	345 min <sup>-1</sup>	844 min <sup>-1</sup>	590 min <sup>-1</sup>	844 min <sup>-1</sup>	600 min <sup>-1</sup>	980 min <sup>-1</sup>
Promjer osovine	750 mm	800 mm	1480 mm, turb.osov.	600 mm	1080 mm	600 mm	600 mm	750 mm
Duljina generator. osovine	4800 mm	5465 mm	bez osovine	5085 mm	7450 mm	5085 mm	5100 mm	5250 mm
Lež.: gornji kombini-rani, donji vodeći	da	da	bez gener. ležajeva	da	da	da	da	da
Nazivna struja	1375 A	-	4913 A	1375 A	5780 A	1375 A	880 A	1230 A
Nazivni napon	10500 V	10500 V	10000 V	10500 V	16000 V	10500 V	10500 V	13800 V

U tehničkom uredu Tvornice generatora, u Odjelu za konstrukciju hidrogeneratora, projektirani su i konstruirani i generatori posebne izvedbe. To su bili generatori (agregati) čija se konstrukcija bitno razlikovala od konstrukcije najvećeg broja izgrađenih generatora. To su bili tzv. *cijevni generatori*. Oni su bili potpuno potopljeni u riječni tok i voda je strujala izvana, oko kapsule generatora. Rotor turbine također je bio izvan kapsule, uronjen u riječni tok. Prikaz jednoga takvoga hidroagregata dan je na slici 6. Hidroagregat je instaliran u HE Dubrava, na rijeci Dravi, nedaleko od Varaždina.

### 3.2 Mehanički proračun turbogeneratora

Sličan postupak primjenjivao se i pri konstrukciji i mehaničkom proračunu turbogeneratora. Nakon što je Odjel za proračun elektromagnetskog polja odredio snagu stroja i sinkroni broj okretaja ( $1500$  ili  $3000 \text{ min}^{-1}$ , frekvencija  $50 \text{ Hz}$ , četveropolni ili dvopolni generator), broj štapova i dimenzije rotorskog i statorskog namota, konstruktori su definirali promjer i dužinu tijela rotora te razmak među ležajevima. U Odjelu za mehaničke proračune računala su se tada naprezanja u tijelu rotora, zatim čvrstoća bandažnog čvora rotora turbogeneratora. To je bio najzahtjevniji element čija su „kapa“ i prsten preuzimali ukupno opterećenje od centrifugalnih sila „glava“ rotorskog namota. „Kapa“ je bila ili dugačka, ili kratka cilindrična ljuska, a prsten, rotirajući disk konstantne debljine. Često puta je trebalo napraviti i proračun toplinskih naprezanja u tijelu rotora turbogeneratora kako za stacionarno stanje, a u izuzetnim okolnostima i za razna nestacionarna stanja, što je ponekad bilo vrlo zahtjevno i komplicirano.



Slika 7. Rotor turbogeneratora, pripremljen za ispitivanje pri teorijskom pobjegu, oznaka: S 2405-2, snaga:  $150 \text{ MW}$ , frekvencija:  $f = 50 \text{ Hz}$ , broj pari polova:  $p = 1$ ,  $n_n = 3000 \text{ min}^{-1}$ , [10]

Kod mehaničkog proračuna turbogeneratora redovito su se računale kritične brzine i forme vibriranja za fleksijske vibracije, uzimajući u obzir i utjecaj giroskopskih efekata. Isto se to

određivalo i za torzijske vibracije pri čemu se tu posebna pozornost posvećivala analizi prisilnih torzijskih vibracija pri dvopolnim i trolpolnim udarnim kratkim spojevima.

Konstrukcija turbogeneratorskih većih promjera i većih snaga iziskivala je i veću pozornost, budući da je trebalo riješiti čitav niz specifičnih problema vezanih za podmazivanje ležajeva i hlađenje toga ulja kao i hlađenje rotorskoga i statorskoga namota. Rotorski namot se hladio, ili zrakom, ili vodom, a kod najvećih turbogeneratorskih i vodikom. Pri hlađenju vodom, ili vodikom, najzahtjevniji su bili problemi brtvljenja.

Tablica 2. Neki od turbogeneratorskih proizvedenih u tvornici *Rade Končar* u Zagrebu. Turbogeneratorski su instalirani u termoelektranama-toplanama na području bivše SFR Jugoslavije.<sup>a)</sup>

Objekt	Tip generatora	Nazivna snaga, kVA	Nazivni napon, V	Brzina vrtnje min <sup>-1</sup>	Godina proizvodnje
Drmno <sup>3)</sup>	WTF 122 np	410000	22000	3000	-
Gacko <sup>2)</sup>	TVV 320-2	353000	20000	3000	1982.
Ugljevik <sup>2)</sup>	TVV 320-2	353000	20000	3000	1983.
Plomin 2	S 2596-2	247000	13800	3000	1999.
Novi Sad 1	S 2406-2	194000	15750	3000	1981.
Plomin 1 <sup>1)</sup>	TGH-120	150000	13800	3000	1968.
Morava <sup>1)</sup>	TGH-120	150000	13800	3000	1968.
Oslomej <sup>1)</sup>	TGH-120	150000	13800	3000	1976.
TE-TO Zagreb	S 2405-2	150000	12500	3000	1978.
TE-TO Novi Sad 2	S 2405-2	150000	15750	3000	1984.
TE-TO Zrenjanin	S 2405-2	150000	15750	3000	1985.
TE-TO Ljubljana	S 2146-2	63000	10500	3000	1982.
Osijek	S 2146-2	56250	10500	3000	1982.
Kutina	S 1835-2	40000	10500	3000	1981.

a) podaci su prikupljeni susretljivošću gospodina Željka Horvatić iz *Končar, Prodaja*.

1) licenca Dolmel, Poljska, 2) licenca SSSR, 3) licenca Brown Boveri Company (BBC).

## 4 Zaključak

Osnovna intencija ovoga rada bila je prikazati dio aktivnosti u Odjelu za mehaničke proračune tehničkoga ureda Tvornice generatora *Rade Končar* u Zagrebu u relativno dugom vremenskom periodu od oko sedamdeset godina te ih tako otrgnuti od zaborava. Kako sam i sam radio određeni broj godina u spomenutom Odjelu, imao sam dovoljno iskustva i spoznaja da se prihvatim pisanja ovoga članka kako bih u nasljeđe ostavio tekst koji će biti, nadam se, interesantan mladim generacijama inženjera da se upoznaju s radom i aktivnostima Odjela u prošlosti. Rad je, u sažetom obliku i bez fotografija i tablica, uvršten u knjigu *Povijest tehničke i primijenjene mehanike*, autora Ive Alfrevića, koja će u izdanju Sveučilišta u Zagrebu, Fakulteta strojarstva i brodogradnje, biti tiskana i objavljena 2023. godine.

U Odjelu za mehaničke proračune ozbiljno i temeljito su se primjenjivala znanja iz tehničke mehanike na probleme čvrstoće, dinamike i vibracija električnih rotacijskih strojeva. Vrijednost tih proračuna potvrđivala se mjerenjima mehaničkih i toplinskih veličina, ili u ispitnoj stanici Tvornice generatora, ili direktnim mjerenjima na izvedenim generatorima u hidro-, odnosno termoelektranama. Na tim osnovama razvile su se mnogobrojne dijagnostičke metode za trajni nadzor mehaničkih parametara na generatorima i turbinama instaliranim u

hidroelektranama i termoelektranama. Odjel za mehaničke proračune Tvornice generatora *Rade Končar* u Zagrebu surađivao je sa Zavodom za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje te sa Zavodom za elektrostrojarstvo i automatizaciju Elektrotehničkog fakulteta (današnji FER). To je bio lijepi primjer suradnje i povezanosti akademske zajednice i industrije u Hrvatskoj. U tvornici su bili prepoznati i definirani mnogi problemi iz konstrukcije i gradnje velikih generatora koji su se onda rješavali na fakultetima kroz izradu diplomskih, magistarskih i doktorskih radova. Nadamo se da će i u budućnosti Odjel nastaviti s istim načinom rada i suradnjom na obostrano zadovoljstvo kako fakulteta, isto tako i tvornice (industrije).

U popisu literature navedeno je samo desetak referenci čiji su autori, neki kraće, a neki cijeli svoj radni vijek proveli u Tvornici generatora i njezinom Odjelu za mehaničke proračune. Izdvojili smo samo nekoliko karakterističnih radova, iako bi pri sveobuhvatnom popisu taj prikaz sadržavao više desetaka, ili čak i stotina, referenci.

## Literatura

- [1] Sirotić, Z. i Jarić, V.; Mehanička stabilnost gljivastih generatora; X. stručno Savjetovanje HK CIGRE; Dubrovnik; 1970.
- [2] Sirotić, Z., Jarić, V. i Demirović, M.; Lamelirani jaram sinkronih generatora; Zavod za elektrostrojarstvo, broj elaborata 403; Elektrotehnički fakultet (FER); Zagreb; 1990.
- [3] Sirotić, Z., Jarić, V. i Kauzlarić, G.; Granične brzine gljivaste izvedbe vertikalnih hidrogenatora; Zbornik radova, rotacijski strojevi; 1. Savjetovanje HK CIGRE; Zagreb; 1993.
- [4] Štrbuncelj, Z. i dr.; Proizvodnja cijevnih generatora za HE Đerdap II.; XVII. Savjetovanje elektroenergetičara Jugoslavije; HK CIGRE; Struga; 1985.
- [5] Jarić, V., Pustaić, D. i Milašinčić, B.; Some Problems of Reversible Machines Dynamics; Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms; Montreal; Canada; 1979.; 2; 1244-1249.
- [6] Pustaić, D.; Elastomehanički problemi vezani za konstrukciju hidrogenatora Shiroro; XIV. Savjetovanje elektroenergetičara Jugoslavije; Zbornik radova, rotacijski strojevi; Sarajevo; 1979.; 43-63.
- [7] Pustaić, D. i Jarić, V.; Procjena pouzdanosti elemenata električnog rotacijskog stroja na osnovi teorije nakupljanja mikrodefekata i analize propagiranja pukotina; Strojstvo, časopis za teoriju i praksu u strojarstvu; 1994; 36, 1/2; 33 – 44.
- [8] Pustaić, D. i Švigir, N.; Komparativna analiza naprezanja u lastinom repu generatora s istaknutim polovima; Zbornik radova Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Zagreb; 1985; 10; 43 – 61.
- [9] Jarić, V. i Kanižanec, K.; Radni vijek kapa turbogeneratora; Zbornik radova, rotacijski strojevi; 1. Savjetovanje HK CIGRE; Zagreb; 1993.
- [10] Jarić, V.; Ciklička naprezanja u rotoru turbogeneratora izazvana fleksijskim vibracijama; XVIII. Savjetovanje elektroenergetičara Jugoslavije; HK CIGRE; Zbornik radova, rotacijski strojevi; Budva; 1987.
- [11] Bonačić, F.; Analiza zamora krajnje polne ploče sinkronog generatora; Završni rad Poslijediplomskog specijalističkog studija; Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje; Zagreb; 2014.
- [12] Kraljević, D., Jagunić, P., Triplat, I., Bonačić, F. i Antonovski, F.; Procjena životnog vijeka vitalnih dijelova kod revitalizacije hidrogenatora; 12. Savjetovanje HRO CIGRE; Šibenik; Hrvatska; studeni 2015.
- [13] Petrinić, M., Šeremet, D., Car, S. i Treger, J.; Sila jednostranog privlačenja magnetski zasićenog generatora i njen utjecaj na dinamičku stabilnost rotora agregata; 11. Savjetovanje HRO CIGRE; Cavtat; Hrvatska; studeni 2013.



# Usporedba algoritama za mapiranje 3D oblaka točaka u 2D parametarski prostor

Samardžić, D.<sup>1</sup> i Ćurković, M.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu ukratko su opisani osnovni algoritmi mapiranja trodimenzionalnog oblaka točaka u dvodimenzionalni parametarski prostor. Opisane su metode harmonijskog mapiranja, mapiranja s mrežom elastičnih opruga i hibridnog mapiranja, koje je linearna kombinacija prethodnih algoritama mapiranja. Prikazane su usporedbe rezultata pojedinog mapiranja na istom primjeru oblaka točaka. Također su prikazane i geometrijske greške pojedinog mapiranja u odnosu na ulazni oblak točaka.

**Ključne riječi:** oblak točaka, harmonijsko mapiranje, mapiranje mrežom elastičnih opruga, hibridno mapiranje

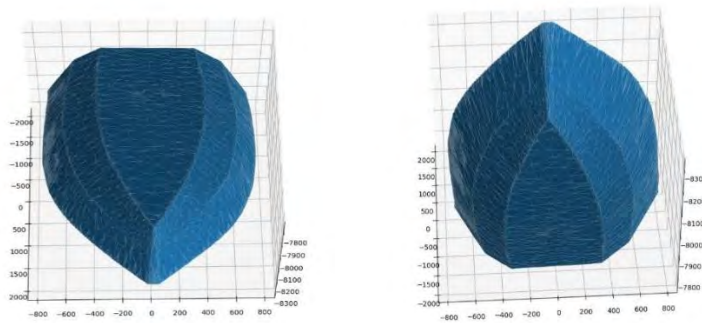
---

<sup>1</sup> **Domagoj Samardžić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Split, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: dsamar00@fesb.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Milan Ćurković**, Sveučilište u Split, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: micurkov@fesb.hr

## 1 Uvod

Mapiranje oblaka točaka u 2D parametarski prostor je jedan od bitnih postupaka u CAD tehnologiji. Ulazni oblak točaka (triangulirana ploha dobivena 3D skeniranjem) potrebno je parametrizirati da bi se mogle uraditi željene numeričke sinteze. Mapiranje oblaka točaka predstavlja prvi korak ka parametarskom CAD modelu te se stoga često koristi prilikom fitanja ploha [2]. Postoje razne metode mapiranja koje se temelje na minimiziranju distorzije kutova ili površina oblaka točaka. Harmonijsko mapiranje se često koristi, princip mapiranja je minimizacija deformacije u obliku Dirichletove energije te se relativno jednostavno implementira preko metode konačnih razlika ili metode konačnih elemenata. Mapiranje mrežom elastičnih opruga uvodi više distorzije ali je implementacija računalno učinkovitija [1]. Također, u ovom radu je opisana i hibridna metoda mapiranja koja predstavlja linearnu kombinaciju navedena dva algoritma mapiranja. Ulazni oblak točaka je model brodice (slika 1.), dobivene 3D skeniranjem na koji su primijenjeni navedeni algoritmi mapiranja te prikazani rezultati i greške.



Slika 1. Ulazni oblik točaka modela brodice

## 2 Algoritmi mapiranja

Model brodice odabran kao primjer za mapiranje sadrži 6605 trokuta u mreži s 4111 točkom. Prije primjene mapiranja moraju se odabrati četiri rubne točke koje su fiksne i predstavljaju četiri kuta u pravokutnoj parametarskoj domeni. Zatim se pronadu sve rubne točke u oblaku kojima se pridijele fiksne vrijednosti u pravokutnoj parametarskoj domeni. Rubne točke se nalaze na rubovima pravokutnika između prvih kutnih točaka te su im vrijednosti dane preko metode tetivne duljine ili skaliranjem između kutnih točaka [1]. U ovom radu su rubne vrijednosti skalirane na vrijednosti  $[0,1]$  između kutnih točaka. Parametarska domena je najčešće definirana s koordinatama  $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ , gdje su fiksne rubne vrijednosti definirane s  $\mathbf{u}_b$  i  $\mathbf{v}_b$ .

### 2.1 Harmonijsko mapiranje

Harmonijsko mapiranje minimizira deformaciju mreže u smislu minimizacije Dirichletove energije. Problem se temelji u rješenju Laplace-ove jednadžbe [1]

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

s Dirichletovim rubnim uvjetima  $\mathbf{u} = (0, \dots, 1)$ . Problem je sveden na linearni sustav jednažbi preko metode konačnih elemenata

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

koji je potrebno riješiti odvojeno za  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  parametarske koordinate, gdje je sustav podvrgnut rubnim vrijednostima  $\mathbf{u}_b$ , odnosno  $\mathbf{v}_b$ . Ako se razmatra jedan vrh nekog trokuta  $t_i$ , koji se nalazi na stranici trokuta  $[t_i, t_j]$  s orijentiranim licem trokuta  $[t_i, t_j, t_k]$  gdje su  $t_i, t_j$  i  $t_k$  sortirani obrnuto od kazaljke na satu [3]. Tada se  $l_{ij}$  koeficijent razmatrane stranice, koji se naziva *kotangens faktor*, odredi kao

$$l_{ij} = \frac{1}{2}(\cot\theta_k + \cot\theta_l) \quad (3)$$

gdje stranica  $[t_i, t_j]$  pripada dvama trokutima  $[t_i, t_j, t_k]$  i  $[t_i, t_j, t_l]$ .  $\theta_k$  je kut trokuta  $[t_i, t_j, t_k]$  u vrhu  $t_k$ , dok je  $\theta_l$  je kut trokuta  $[t_i, t_j, t_l]$  u vrhu  $t_l$ . Ako stranica  $[t_i, t_j]$  pripada samo jednom trokutu  $[t_i, t_j, t_k]$  tada je  $l_{ij}$  jednak

$$l_{ij} = \frac{1}{2}\cot\theta_k \quad (4)$$

## 2.2 Mapiranje mrežom elastičnih opruga

Algoritam ima isti princip kao i harmonijsko mapiranje, jedina razlika je da se svi rubovi triangulacije razmatraju kao mreža opruga iz čega se dobije sustav [1]

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

gdje se koeficijent  $k_{ij}$  naziva *faktorom krutosti opruge* i računa se kao

$$k_{ij} = 1/l_{ij} \quad (6)$$

gdje je  $l_{ij}$  duljina stranice  $[t_i, t_j]$ .

## 2.3 Hibridno mapiranje

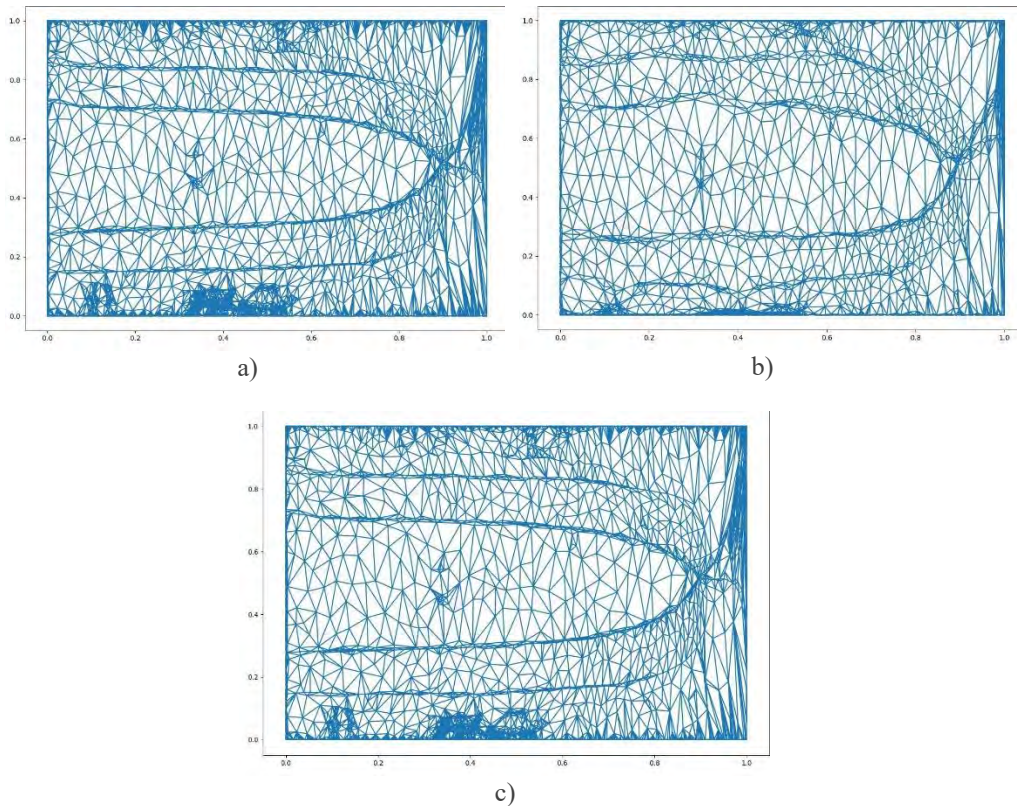
Hibridno mapiranje kombinira prethodne matrice ( $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{L}$ ) iz mapiranja mrežom elastičnih opruga i harmonijskog mapiranja s novom matricom [1]

$$\mathbf{H} = \lambda\mathbf{K} + (1 - \lambda)\mathbf{L} \quad (7)$$

gdje je  $\lambda$  *faktor miješanja* matrica (eng. *blending ratio*).

### 3 Rezultati i usporedba

Na slici 2. se nalaze rezultati mapiranja modela brodice u pravokutnu parametarsku domenu. Prve dvije slike prikazuju rezultate harmonijskog mapiranja i mapiranja s elastičnim oprugama, dok je za hibridno mapiranje usvojen faktor miješanja  $\lambda = 0,5$ , tako da obje matrice imaju jednak utjecaj na rezultat mapiranja.

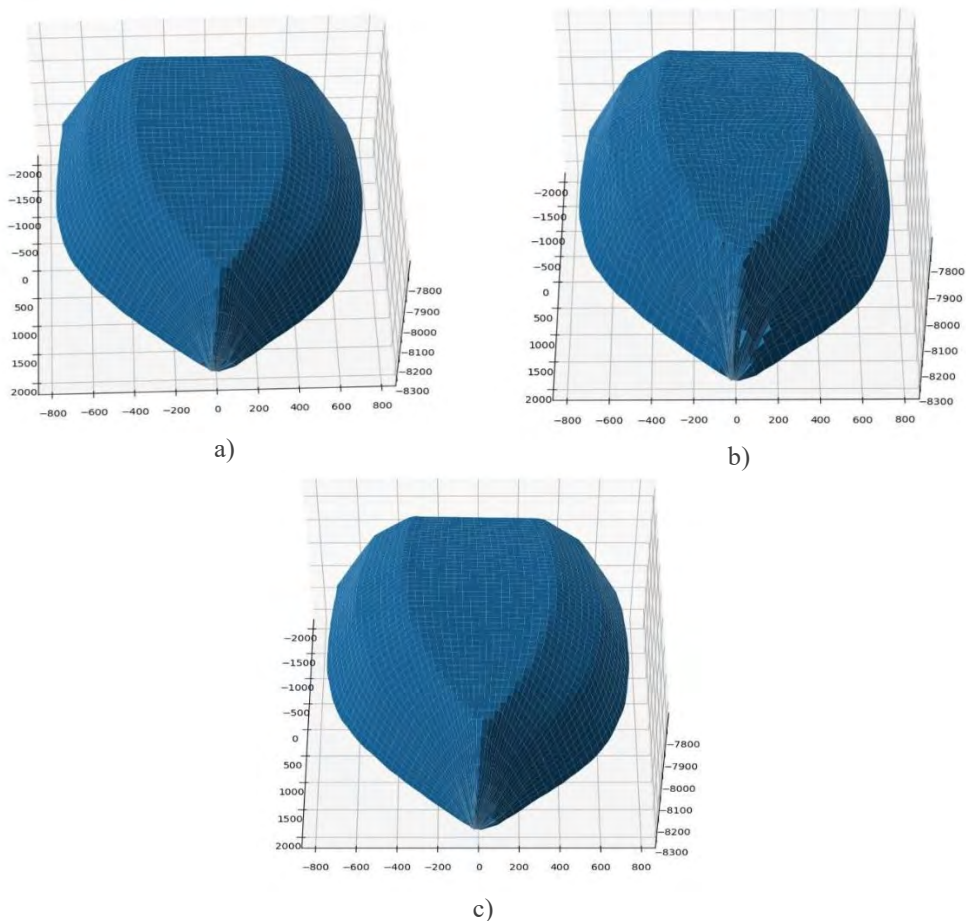


Slika 2. 2D projekcije mapiranja: a) harmonijsko mapiranje, b) mapiranje mrežom elastičnih opruga, c) hibridno mapiranje

Kao što se može vidjeti na slici gore, harmonijskim mapiranjem postižu se „glatkija“ rješenja. To se najviše ističe na konturama rubova i vrhova brodice što se vidi slikama a) i c). Nakon mapiranja modela, potrebno je uraditi interpolaciju (najčešće se koristi linearna interpolacija) za proizvoljnu diskretizaciju pravokutne parametarske domene,  $n_u \times n_v$ . Interpolacija se provede kroz ulazni oblak točaka za diskretiziranu mrežu parametarske domene, čime se ostvari nova mreža modela veličine  $n_u \times n_v$  (slika 3). U ovom radu je odabrana mreža veličine  $50 \times 50$ .

Kao mjera uspješnijeg algoritma mapiranja, odrediti će se greška između mreže dobivene linearnom interpolacijom i oblaka točaka. Za svaku točku diskretizacije iz dobivene mreže

$(n_u \times n_v)$  izračunati će se najmanja udaljenost (odstupanje) od oblaka točaka algoritmom iz rada [4].



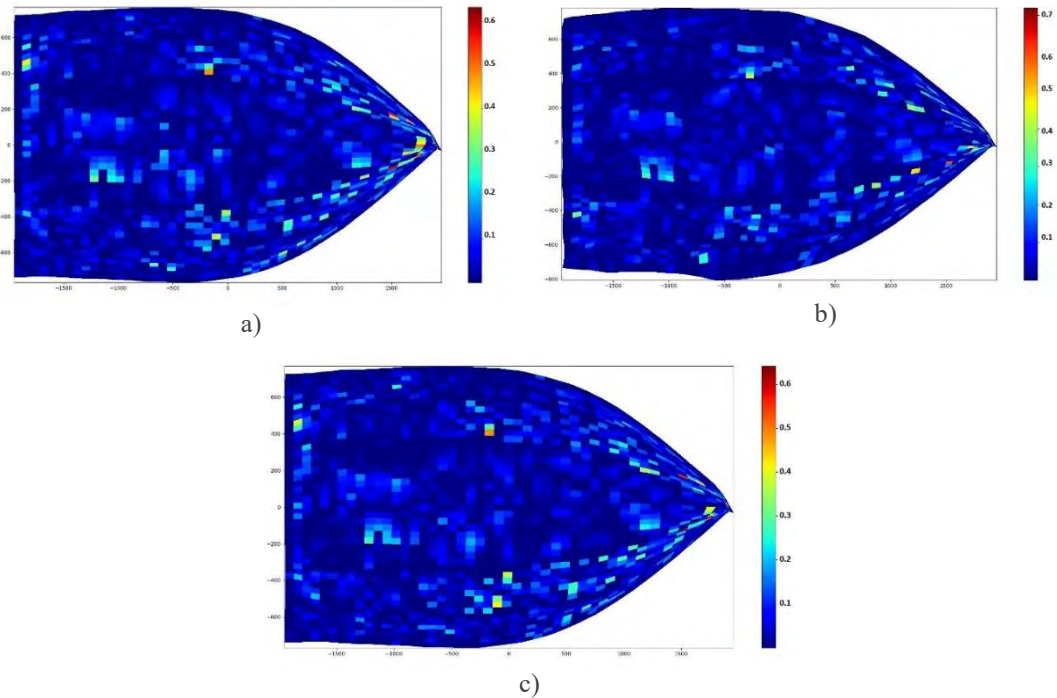
Slika 3. Mreže modela brodice dobivene linearnom interpolacijom između oblaka točaka i projekcije dobivene: a) harmonijskim mapiranjem, b) mapiranjem mrežom elastičnih opruga, c) hibridnim mapiranjem

Na slici 4. prikazane su udaljenosti dobivene iz [4], podijeljene s najmanjom dimenzijom brodice. Kao najmanja dimenzija brodice usvojena je visina, tj. razlika između najveće i najmanje koordinate u oblaku točaka duž z-osi.

## 4 Zaključak

U ovom radu prikazani su neki od osnovnih algoritama mapiranja oblaka točaka u parametarsku domenu. Mreža dobivena linearnom interpolacijom između projekcije mapiranja i oblaka točaka služi kao temelj pri fitanju ploha i daljnjim parametrizacijama. Prikazana su tri algoritma

mapiranja, gdje se vidi da harmonijsko i hibridno mapiranje (hibridno s većim utjecajem matrice  $L$ ) postižu bolje rezultate, posebno prilikom projekcije rubova i vrhova ulaznog modela.



Slika 4. Relativne greške između oblaka točaka i mreže dobivene interpolacijom kroz parametarsku domenu: a) harmonijskog mapiranja, b) mapiranja mrežom elastičnih opruga, c) hibridnim mapiranjem

## Literatura

- [1] Marinić-Kragić, I., Ćurković, M. i Vučina, D.,; Adaptive re-parameterization based on arbitrary scalar fields for shape optimization and surface fitting; Engineering Applications of Artificial Intelligence; 2018; 67; 39-51.
- [2] Ćurković, M., Marinić-Kragić, I. i Vučina, D.,; A novel projection of open geometry into rectangular domain for 3D shape parameterization; Integrated computer-aided engineering; 2018; 25(1); 1-14.
- [3] Gu, D.,; Harmonic map tutorial with C++ source [Internet]; 2010; Available from: <https://www3.cs.stonybrook.edu/~gu/tutorial/HarmonicMap.html>.
- [4] Jones, M., W.,; 3D distance from a point to a triangle; Technical report CSR-5-95; 1995.

# Određivanje parametara Newmark-ove scheme vremenske integracije za nelinearni problem lančanica

Sedlar, D.<sup>1</sup>

## Sažetak

U ovom radu obrađena je vremenske integracije nelinearnog problema koristeći Newmark-ovu schemu integracije. Integracija je primijenjena na problem dvije lančanice koje su povezane s kliznim osloncem. Gibanje lančanica predstavlja geometrijsku nelinearnost, a dodavanjem kliznog oslonca dobiva se set diferencijalno-algebarskih jednadžbi za čije se rješavanje uz Newmark-ovu schemu integracije koristi i iterativna Newton-Raphson metoda kako bi se postigla konvergencija. Lančanice su modelirane koristeći NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) krivulje.

**Ključne riječi:** Newmark-ova integracija, lančanica, nelinearnost

---

<sup>1</sup> **prof. dr. sc. Damir Sedlar**, Sveučilište u Split, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: dsedlar@fesb.hr

## 1 Opis problema i modeliranje

Lančanica su u današnjici našle veliki broj primjena, od jednostavnih linijskih sustava do kompleksnih trodimenzionalnih sustava kao što su zipline, različite vrste konstrukcija za krovove, viseći mostovi i slično. Međutim zbog svoje fleksibilnosti lančanice su podložne velikim pomacima a nerijetko i velikim deformacijama. Ovi pomaci i deformacije su glavni problem prilikom rješavanja dinamičkih lančanih sustava jer su uzrok nelinearnosti. Dinamika lančanih sustava može se u jednostavnim slučajevima rješavati analitičkim metodama [1], a u složenijim sustavim tipično se rješava metodom konačnih elemenata [2]. Međutim dodavanjem više lančanica i povezivanjem istih s kliznim osloncem sustav postaje dodatno zahtjeva u pogledu rješavanja jer se uz diferencijalne jednadžbe pojavljuju i algebarske jednadžbe koje vode do seta diferencijalno-algebarskih jednadžbi [3]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\Lambda} + p\boldsymbol{\Phi}) - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{M}$  matrica masa,  $\mathbf{F}$  je vektor unutrašnjih sila,  $\mathbf{B}$  je matrica gradijenata ograničenja,  $\mathbf{q}$  predstavlja vektor pomaka,  $\boldsymbol{\Lambda}$  predstavlja Lagrangeove multiplikatore,  $p$  je kazneni faktor,  $\boldsymbol{\Phi}$  je matrica ograničenja te  $\mathbf{F}_e$  je vektor vanjskih sila. Kako bi se sustav (1) riješio potrebno je provesti linearizaciju te primijeniti Newton-Raphsonovu metodu što vodi do konačnog seta jednadžbi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_C)\Delta\mathbf{q} + \mathbf{B}^T\Delta\boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{r} \\ \mathbf{B}\Delta\mathbf{q} &= -\boldsymbol{\Phi} \end{aligned} \quad (2)$$

gdje je inkrement varijabli označen s  $\Delta$ ,  $\mathbf{K}_T$  predstavlja tangentnu matricu krutosti,  $\mathbf{K}_C$  predstavlja matricu krutosti ograničenja, a  $\mathbf{r}$  predstavlja vektor ostatka.

### Zahvale

Ovaj rad je podržan od Sveučilišta u Splitu, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Istraživačka grupa za dinamiku i vibracije.

### Literatura

- [1] Thai, H. i Kim, S.; Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite Elements in Analysis and Design*; 2011; 47(3);237–246;
- [2] Chen, Z., Wu, Y., Yin, Y., Shan, C.; Formulation and application of multi-node sliding cable element for the analysis of suspen-dome structures; *Finite Elements in Analysis and Design*; 2010; 46(9); 743–750.
- [3] Zhou, B., Accorsi, M., Leonard, J.; Finite element formulation for modeling sliding cable elements; *Computers and Structures*; 2004; 82(2–3); 271–280.



## Slobodne vibracije tanke grede sa točkastom masom djelomično uronjene u vodu

Skoblar, A.<sup>1</sup>, Štimac Rončević, G.<sup>2</sup>, Žigulić, R.<sup>3</sup>, Braut, S.<sup>4</sup> i Čanadija, M.<sup>5</sup>

### Sažetak

U radu se analiziraju osnovne značajke slobodnih vibracija, vlastite frekvencije i oblici vibriranja, fleksibilne tanke grede koja je u interakciji s vodom. Jednadžbe koje opisuju ponašanje sustava definirane su koristeći metodu separacije varijabli i metodu superponiranja. Izračuni pokazuju da su vlastite frekvencije interakcijskog dinamičkog sustava niže od vlastitih frekvencija suhe fleksibilne grede upućujući da je utjecaj vode na gredu sličan utjecaju dodatne mase. Istim pristupom, dodavanjem točkaste mase na slobodnom vrhu vlastite frekvencije su još nižih iznosa.

**Ključne riječi:** vibracije grede, interakcija s fluidom

---

<sup>1</sup> **izv. prof. dr. sc. Ante Skoblar**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: askoblar@riteh.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Goranka Štimac Rončević**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: gstimac@riteh.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Roberto Žigulić**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: zigulic@riteh.hr

<sup>4</sup> **prof. dr. sc. Sanjin Braut**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sbraut@riteh.hr

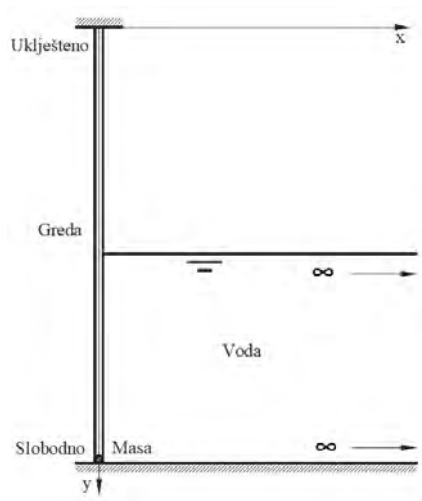
<sup>5</sup> **prof. dr. sc. Marko Čanadija**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: marko.canadija@riteh.hr

## 1 Uvod

U biološkim istraživanjima izazov je izvršiti pouzdano mjerenje male promjene mase jedne žive stanice. U istraživanju [1] opisana je upotreba tzv. mikrofluidnih konzola koje vibriraju u fluidu pri mjerenju mase jedne žive stanice na pikogram-skali. Za ovakva mjerenja senzor (u ovom slučaju konzola) služi za prihvat stanice na svojem vrhu i iz promjene rezonantnih frekvencija vibracijskog odziva sustava greda-masa-fluid određuje se masa. U ovom radu prezentiran je model izračuna vlastitih frekvencija i oblika vibriranja tanke grede uklještene s jedne strane, uronjene u fluid djelomično ili potpuno te sa ili bez točkaste mase na njezinom vrhu. Izračun se temelji na modelima prezentiranim u radu [2].

## 2 Opis modela

Kinematika ravninskog modela vibracija grede uronjene u teški fluid (vodu) sa točkastom masom na slobodnom vrhu koji se koristi u ovom članku temelji se na Euler-Bernoulli (EB) kinematskim pretpostavkama, s obzirom da je greda tanka (vidjeti Sliku 1).



Slika 1. Prikaz modela

Gibanje dijela grede na zraku definira se iz diferencijalne jednačbe po EB teoriji

$$EI \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} + \rho_s A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

gdje je  $E$  modul elastičnosti materijala grede,  $I$  aksijalni moment tromosti poprečnog presjeka grede,  $\rho_s$  gustoća materijala grede,  $A$  površina poprečnog presjeka grede i  $u_1$  poprečni pomak.

Koristeći metodu separacije varijabli za definiciju poprečnog pomaka

$$u_1(y, t) = U_1(y)T(t) \quad (2)$$

i nakon uvrštavanja, parcijalnih derivacija i dijeljenja cijele jednadžbe s  $T(t)$  slijedi

$$EI \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \rho_s A \widehat{\Omega}^2 U_1 = 0 \quad (3)$$

Nakon definiranja bezdimenzijskih parametara

$$\bar{U} = \frac{U}{H}, \omega^4 = \frac{\rho_s A \widehat{\Omega}^2}{EI} H^4, \eta = \frac{y}{H} \quad (4)$$

gdje je  $H$  duljina grede,  $\widehat{\Omega}$  kružna vlastita frekvencija slijedi uvrštavanje u jednadžbu (1)

$$\bar{U}^{(4)} - \omega^4 \bar{U} = 0 \quad (5)$$

U jednadžbi (5) broj u zagradi označava derivaciju po bezdimenznoj veličini  $\eta$  i opće rješenje jednadžbe je

$$\bar{U}_1 = D_1 \cos(\omega\eta) + D_2 \sin(\omega\eta) + D_3 \cosh(\omega\eta) + D_4 \sinh(\omega\eta) \quad (6)$$

Gibanje mokrog dijela grede definira se diferencijalnom jednadžbom po EB teoriji

$$EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} + \rho_s A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -p(0, y, t) \quad (7)$$

ali sad se radi o nehomogenoj jednadžbi gdje  $p(0, y, t)$  predstavlja silu na element  $dx$  grede koja se definira iz polja tlakova domene fluida.

Pod pretpostavkom male pobude, linearizirana jednadžba koja opisuje dinamički tlak  $p(x, y, t)$  u vodi, glasi

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (8)$$

gdje je  $p(x, y, t)$  je dinamički tlak u fluidu a  $c$  brzina vala.

Koristeći metodu separacije varijabli

$$p = X(x)Y(y)T(t) \quad (9)$$

slijedi

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} + \frac{\widehat{\Omega}^2}{c^2} = 0 \quad (10)$$

$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} = \frac{-i^2 k_x^2}{i^2 k_x^2}$        $\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} = \frac{-i^2 k_y^2}{i^2 k_y^2}$

i za  $x$ -os vrijedi

$$X'' + k_x^2 X = 0. \quad (11)$$

Za određivanje funkcije  $X(x)$  vrijede rubni uvjeti: na lijevoj strani, gdje je fleksibilna gređa, dinamički tlak može biti pozitivan ili negativan te prva derivacija tlaka po  $x$ -u postoji na temelju izraza za interakciju (19), i na desnoj strani u beskonačnosti tlak je jednak nuli. Rješenje je

$$X(x) = e^{-k_x x} \quad (12)$$

gdje je  $k_x$  realan broj.

Slično, za funkciju  $Y(y)$  vrijedi

$$Y'' + k_y^2 Y = 0. \quad (13)$$

Za određivanje funkcije  $Y(y)$  vrijede rubni uvjeti: na slobodnoj površini dinamički tlak je jednak nuli, i na dnu fluida derivacija tlaka po  $y$ -onu jednaka je nuli, tj. dno je nepropusno i kruto. Slijedi rješenje

$$Y(y) = \frac{D \cos(k_y(H - y))}{\sin(H k_y)} \quad (14)$$

gdje je valni broj jednak

$$k_{yn} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{H - h}, \quad n = 0, 1, -1, 2, -2, \dots \quad (15)$$

a  $h$  je duljina suhog dijela gređe.

Relacija disperzije na temelju izraza (10) ima oblik

$$\hat{\Omega} = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (16)$$

U ovom izrazu  $k_x$  je imaginaran broj jer amplituda dinamičkog tlaka opada pri udaljavanju od gređe po osi  $x$  i nema propagacije valova. Slijedi da je korelacija valnih brojeva  $k_x$  i  $k_y$  i vlastite kružne frekvencije sustava je

$$k_{xn}^2 = k_{yn}^2 - \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} > 0 \quad (17)$$

a s obzirom da  $k_x$  mora biti imaginaran onda mora vrijediti

$$k_{yn}^2 > \frac{\hat{\Omega}^2}{c^2} \quad (18)$$

Interakcija se događa na površini gređe i definira se izrazom

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (19)$$

koji uz definiciju pomaka pomoću separacije varijabli

$$u_2(y, t) = U_2(y)T(t) \quad (20)$$

i principa superpozicije daje izraz

$$U_2(y) = \frac{1}{\rho_f \bar{\Omega}^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} G_n (-k_x) e^{-k_x y} \frac{\cos(k_y(H-y))}{\sin(Hk_y)} \quad (21)$$

gdje je  $G_n$  konstanta,  $\rho_f$  gustoća fluida i  $n_1$  redni broj oblika vibriranja koji zadovoljava uvjet (18).

Koristeći bezdimenzijske veličine dobije se izraz za poprečni pomak iz interakcije

$$\bar{U}_2(\eta) = \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma \omega^4} (-\bar{k}_{xn}) \frac{\cos(\bar{k}_{yn}(1-\eta))}{\sin(\bar{k}_{yn})} \quad (22)$$

i izraz za poprečni pomak mokrog dijela grede

$$\bar{U}_2(\eta) = \sum_{j=5}^8 D_j \phi_j + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega^4 - \bar{k}_{y1}^4} \bar{Y}_n \quad (23)$$

gdje su

$$\bar{Y}_n = \frac{\cos(\bar{k}_{yn}(1-\eta))}{\sin(\bar{k}_{yn})}, \phi_5 = \cos(\omega(\eta-1)), \phi_6 = \sin(\omega(\eta-1)), \quad (24)$$

$$\phi_7 = \cosh(\omega(\eta-1)), \phi_8 = \sinh(\omega(\eta-1))$$

Definiranjem odgovarajućih veličina  $A_n$  uključuje se interakcija u poprečni pomak grede. Veličine  $A_n$  se određuju iz izjednačavanja izraza (22) i (23). Nova jednačba se množi s funkcijom  $Y_n$  i koristi se njezina ortogonalnost

$$\int_{\nu}^1 Y_n(\xi) Y_m(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, \dots, m \neq n \\ \frac{\nu-1}{\cos\left(\frac{|4n-1|\pi}{\nu-1}\right) - 1}, \dots, m = n \end{cases} \quad (25)$$

za definiranje rješenja gibanja mokrog dijela grede:

$$\bar{U}_2 = \sum_{j=5}^8 D_j \phi_j + \sum_{n=n_1}^{\infty} \tilde{E}_n \sum_{i=5}^8 D_i I_{ni} \bar{Y}_n \quad (26)$$

gdje je

$$\tilde{E}_n = \frac{-1}{\left(1 - \frac{(\bar{k}_{yn}^4 - \omega^4)\bar{k}_{xn}}{\gamma\omega^4}\right)} I_{ni} = \int_v^1 Y_n \phi_i d\eta \quad (27)$$

Uvrštavanje jednadžbi  $\bar{U}_1(\eta)$  i  $\bar{U}_2(\eta)$  te njihovih derivacija po koordinati  $\eta$  u nedimenzionalni oblik jednadžbi rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(0) = 0, \quad \bar{U}_1^{(1)}(0) = 0, \quad \bar{U}_2^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{U}_2^{(3)}(1) = r_m \bar{U}_2(1)\omega^4, \\ \bar{U}_1(v) = \bar{U}_2(v), \quad \bar{U}_1^{(1)}(v) = \bar{U}_2^{(1)}(v), \quad \bar{U}_1^{(2)}(v) = \bar{U}_2^{(2)}(v), \quad \bar{U}_1^{(3)}(v) = \bar{U}_2^{(3)}(v) \end{aligned} \quad (28)$$

gdje je  $r_m$  omjer točkaste mase i ukupne mase grede, daje linearni homogeni sustav algebarskih jednadžbi koje se mogu napisati u matričnom obliku.

$$\mathbf{RD}=0 \quad (29)$$

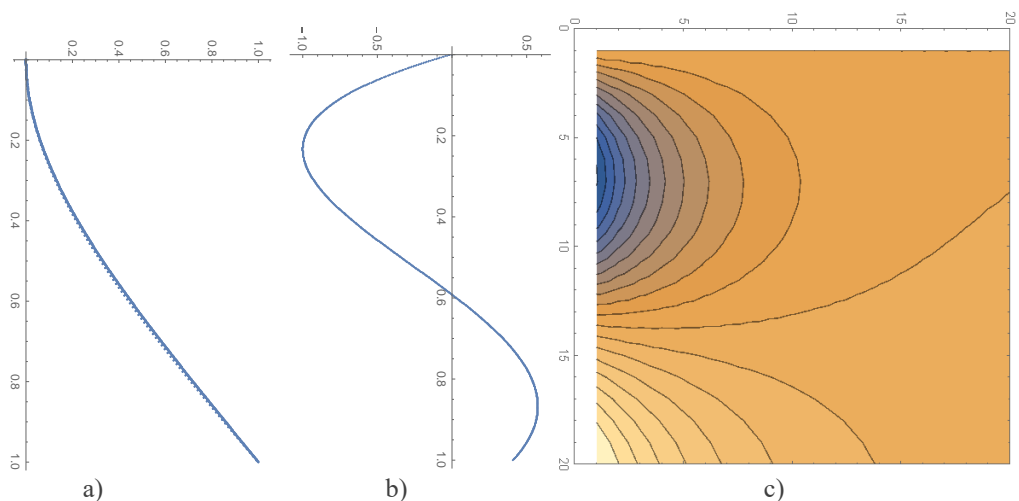
Da bi sustav jednadžbi imao netrivialna rješenja determinanta kvadratne matrice  $\mathbf{R}$  mora biti jednaka nuli što daje vrijednosti vlastitih frekvencija.

### 3 Numerički rezultati

#### 3.1 Primjer 1

U ovom primjeru izračunata je prva vlastita frekvencija i oblik vibriranja grede kao i odgovarajuće polje tlaka u okolnom fluidu bez i sa dodanom točkastom masom na slobodnom kraju grede, sa i bez uranjanja u vodu.

Zadana je brzina zvuka u vodi  $c=1439$  m/s a gustoća vode je  $1000$  kg/m<sup>3</sup>. Greda je ili potpuno suha ili u potpunosti uronjena u fluid. Modul elastičnosti materijala grede je  $200$  GPa, gustoća materijala grede je  $7850$  kg/m<sup>3</sup>, duljina grede je  $1$  m, debljina grede je  $0.05$  m i točkasta masa na slobodnom kraju grede iznosi  $10$  % ukupne mase grede.



Slika 2. Prikaz 1. vlastitog oblika vibriranja a) suhe grede bez (—) i sa dodatnom točkastom masom (.....), b) mokre grede s dodatnom točkastom masom i c) realnog polja dinamičkog tlaka oko grede

### 3.2 Primjer 2

U ovom primjeru uspoređene su izračunate vlastite frekvencije suhe grede, grede sa dodanom točkastom masom na njezinom slobodnom vrhu i grede uronjene u fluid (vidjeti Tablicu 1). Korišteni su isti parametri sustava kao u 1. primjeru.

Tablica 1. Primjer izgleda tablice sa širinom prilagođenom širini stranice

Rbr.vlastite frekvencije	Rbr. oblika vibriranja	Suha greda	Dodana masa	Potpuno uronjena
1	1	1.87538	1.72309	1.57321
2	2	4.69477	4.40022	4.72236
3	3	7.85534	7.45137	7.86393
4	4	10.9959	10.5225	10.2251

## 4 Zaključak

Dinamičko ponašanje interakcijskog sustava fleksibilna greda-voda sa točkastom masom na slobodnom vrhu grede je analizirana uz rubni uvjet nultog dinamičkog tlaka u beskonačnosti po osi  $x$  domene vode i na slobodnoj površini vode. Jednadžbe koje definiraju sustav analizirane su koristeći metodu separacije varijabli. Točna rješenja vlastitih frekvencija i oblika vibriranja slobodnih vibracija interakcijskog sustava su određena. Iz primjera je vidljivo da se vlastite frekvencije snižuju sa dodavanjem točkaste mase i uranjanjem grede u fluid.

**Zahvale**

Autori se zahvaljuju financijskoj potpori Hrvatske zaklade za znanost (projekt broj IP-2019-04-4703) i Sveučilišta u Rijeci (projekt broj uniri-tehnic-18-37 i projekt broj uniri-tehnic-18-225).

**Literatura**

- [1] Chen, C.-C., Jiang, J., Bong, B., Li, T. i Gaitas, A.; AFM Microfluidic Cantilevers as Weight Sensors for Live Single Cell Mass Measurements; *Measurement Science and Technology*; 2022.; 33 (9); 095009
- [2] Xing, J.T., Price, W.G., Pomfret, M.J. i Yam, L.H. i Gaitas, A.; Natural vibration of a beam-water interaction system; *Journal of Sound and Vibration*; 1997; 199(3); 491-512.



## Eksperimentalno određivanje zaostalih naprezanja uslijed čepjenja cijevi na cijevnom bloku parogenerators

Šarlija, L.<sup>1</sup>, Damjanović, D.<sup>2</sup> i Kozak, D.<sup>3</sup>

### Sažetak

Razvojem civilizacije i tehnologije, potražnja za električnom energijom raste. Danas jedan od najpouzdanijih i „čistih“ sustava za generiranje električne energije predstavljaju nuklearne elektrane, zbog čega se javlja potreba za sve većim brojem nuklearnih elektrana pogotovo u kriznim vremenima. Nuklearna elektrana se sastoji od primarnog i sekundarnog kruga, te se oslobođena toplina nuklearnom fisijom u primarnom krugu prenosi strujanjem radioaktivne vode kroz cijevi parogenerators u sekundarni krug gdje se nalazi čista voda. Cijevi parogenerators čine barijeru između primarnog i sekundarnog kruga, te su izloženi uvjetima u parogenerators i različitim degradacijskim mehanizmima koji mogu oštetiti i dovesti do puknuća cijevi, te curenja vode iz primarnog u sekundarni krug i dalje u okoliš. Ispitivanje oštećenja cijevi se provodi na bazi metode vrtložnih struja, pomoću specijaliziranih manipulators. Pronalaskom oštećenja na cijevima iznad graničnih vrijednosti, javlja se potreba za korektivnom akcijom u vidu čepjenja cijevi. Instalacijom čepa se oštećena cijev isključuje iz funkcije, te on sprječavanja daljnje curenje radioaktivne vode. Kako bi se čep mogao koristiti u nuklearnoj elektrani, on mora zadovoljiti zahtjeve standarda po kojem je nuklearna elektrana napravljena, u ovom slučaju ASME i RSE-M standard. U radu je provedeno eksperimentalno određivanje zaostalih naprezanja uslijed čepjenja cijevi na cijevnom bloku parogenerators pomoću mehaničkog čepa. Preveliko širenje i koncentracija naprezanja bi mogli prouzročiti mikropukotine i potencijalno pucanje cijevne stijene, koje bi izazvalo havariju i ogromne troškove zamjene parogenerators. Eksperimentalno određivanje zaostalih naprezanja je provedeno prije i nakon instalacije mehaničkog čepa, te nakon jednog ciklusa paljenja i gašenja nuklearne elektrane. U provedbi eksperimentalnog ispitivanja se koristila metoda bušenja rupice prema standardnu ASTM E837. U radu su prikazani su rezultati ispitivanja za sva kritična mjesta na cijevnom bloku parogenerators, kako bi se potvrdila valjanost dizajna mehaničkog čepa i parametara instalacije.

**Ključne riječi:** nuklearna elektrana, parogenerators, mehanički čep, zaostala naprezanja, ASTM E837

<sup>1</sup> **Luka Šarlija, mag. ing. mech.**, INETEC – Institut za nuklearnu tehnologiju, Dolenica 28, 10250 Lučko, e-mail: luka.sarlija@inetec.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Darko Damjanović**, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: ddamjanovic@unisb.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Dražan Kozak**, Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: dkozak@unisb.hr

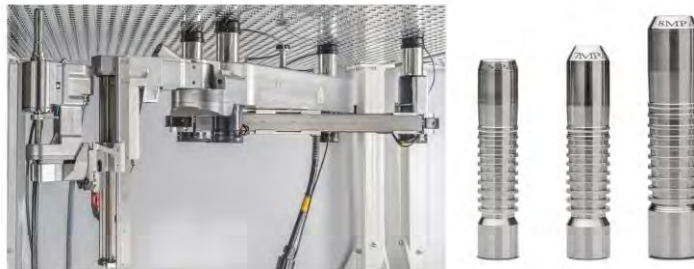
## 1 Uvod

Uloga PWR (eng. Pressurized Water Reactor) parogeneratorsa je prijenos topline oslobođene u primarnom krugu uslijed nuklearne fisije koja se strujanjem radioaktivne vode kroz cijevi parogeneratorsa prenosi na čistu vodu u sekundarnom krugu. Voda u sekundarnom krugu isparava te prelazi u paru koja udarajući u lopatice turbine preko osovine pokreće generator, koji generira električnu energiju. Također cijevi parogeneratorsa predstavljaju barijeru između primarnog i sekundarnog kruga, te predstavljaju kritičnu komponentu u cijelom lancu.

Cijevi parogeneratorsa su izložene visokom tlaku i temperaturi koji prevladavaju u primarnom krugu, također i vibracijama uslijed strujanja vode. Najveća opasnost od oštećenja cijevi je zamor materijala i pucanje cijevi uslijed napetostne korozije prouzrokovane uvjetima primarnog kruga u parogeneratoru.

Uslijed svih navedenih degradacijskih mehanizama, dolazi do oštećenja cijevi koje može dovesti do pucanja cijevi i curenja radioaktivne vode iz primarnog u sekundarni krug, te radioaktivna voda može iscuriti dalje u okoliš. Stanje cijevi se ispituje robotskim sustavima specijalno dizajniranim za ovu namjeru, kao robotski sustav Forerunner tvrtke INETEC [1]. Robotski sustav uz pomoć sonde koje rade na principu vrtložnih struja može ispitati stanje cijevi parogeneratorsa, te na temelju analize podataka odrediti istrošenost cijevi, koja ukoliko prelazi kriterij propisan od strane nuklearne elektrane i regulatornog tijela zahtijeva neku vrstu korektivne akcije, za spriječavanje curenja radioaktivne vode.

Korektivna akcija u ovom slučaju predstavlja čepljenje cijevi PWR parogeneratorsa mehaničkim čepom, koji s cijevi parogeneratorsa stvara nepropusni brtveni spoj. Mehanički čep tvrtke INETEC se instalira robotskim sustavom Forerunner uz dodatni alat za instalaciju mehaničkog čepa, Slika 1.



Slika 1. Forerunner sa sustavom za čepljenje (lijevo), PWR mehanički čepovi (desno)

Kako bi mehanički čep mogao biti instaliran u cijev parogeneratorsa, mora proći dugotrajna testiranja njegovih performansi prema relevantnim standardima po kojima je nuklearna elektrana izgrađena, u ovom slučaju ASME i RSE-M standard, kako bi se dokazalo da čep može izdržati normalne i izvanredne uvjete rada. Dodatno se potvrđuju parametri instalacije, temeljeni na FEM (eng. Finite Element Method) analizi i razvoju dizajna čepa, gdje se eksperimentalno validiraju provedene FEM analize. Posebna pozornost je usmjerena prema utjecaju mehaničkog čepa na cijevnu stijenu parogeneratorsa, gdje se mjerenjem zaostalih naprezanja određuje utjecaj na cijevnu stijenu. Na temelju provedenih ispitivanja i kvalifikacije regulatorno tijelo svake pojedine države odobrava korištenje mehaničkih čepova, kao korektivne akcije za čepljenje oštećenih cijevi parogeneratorsa.

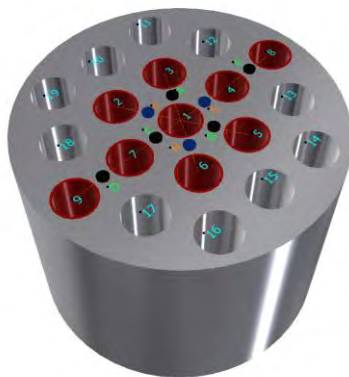
## 2 Priprema cijevnog bloka za eksperimentalno mjerenje

Parogeneratori se sastoje od cijevne stijene u kojoj je instalirano postupkom rolanja do 15000 cijevi kroz koje struji radioaktivna voda iz primarnog kruga tijekom normalnog rada. Rolanjem se cijevi parogeneratora plastično deformiraju, te se dodatno zavaruju obodno na čelu. Čepljenjem se stvara nepropusni spoj između čepa i cijevi koja je oštećena, te se sama cijev uklanja iz funkcije. Uslijed instalacije mehaničkog čepa dolazi do plastične deformacije kako mehaničkog čepa, tako i cijevi, što rezultira povećanjem naprezanja u cijevi. Uslijed deformacije cijevi nepobitno je da se jedan dio naprezanja prenosi i na stijenku parogeneratora.

Pojavom koncentracije naprezanja na cijevnoj stijeni, moglo bi doći do nastanka mikropukotina, te potencijalno oštećenja susjednih cijevi, iz razloga što je stijenka između dviju cijevi u parogeneratoru debljine 8 mm (ovisno o razmaku cijevi i vrsti parogeneratora).

Eksperimentalno određivanje zaostalih naprezanja na cijevnom bloku provedeno je prema ASTM E837 standardu [2], kako bi se odredilo lokalno naprezanje na cijevnom bloku parogeneratora uslijed provedbe postupka čepljenja cijevi.

Za provedbu ispitivanja se koristio manji blok promjera 130 mm s 19 provrta gdje su cijevi instalirane postupkom rolanja u provrte naznačene brojevima 1-9, te su im dodatno čela obodno zavarena na blok, slika 2.



Slika 2. Cijevni blok parogeneratora

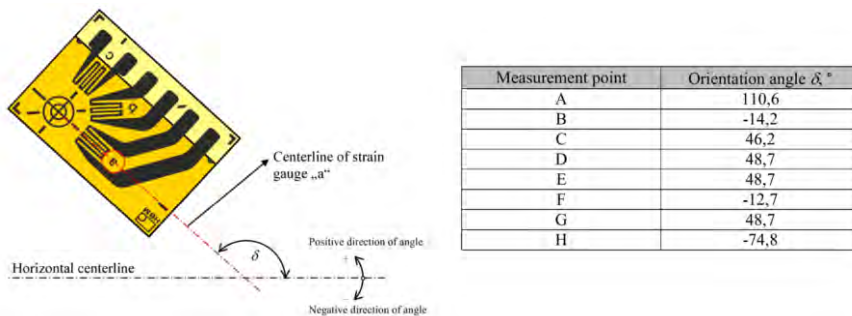
Odstupanja od cijevne stijene parogeneratora postoje, a vezane su za nedostupnost nabavke originalnog materijala cijevne stijene 18MnD5, te je korišten AISI 4140 materijal, koji ima slična svojstva i sličan sastav. Dodatno odstupanje je u nedostupnosti originalnih cijevi, te je originalna cijev instalirana u središnji provrt naznačen s brojem 1, slika 2, dok su preostale SS316L prototipne cijevi nešto većeg promjera, uslijed toga, debljina stijenske je manja nego u realnom parogeneratoru. Iz tog razloga očekuju se veći iznosi naprezanja u odnosu na stvarni slučaj u parogeneratoru. Sve ovo ima utjecaj na određivanje zaostalih naprezanja, te su dodatne analize provedene korištenjem metode konačnih elemenata za navedeni slučaj. Provedbom vlačnog testa dobiveni su parametri materijala bloka ( $E = 221,5$  GPa,  $\nu = 0,23$ ).

### 3 Provedba eksperimentalnog određivanja zaostalih naprezanja

Kako bi se dobio što točniji utjecaj na instalaciju mehaničkog čepa, provedba ispitivanja je podijeljena u nekoliko koraka prema slici 2:

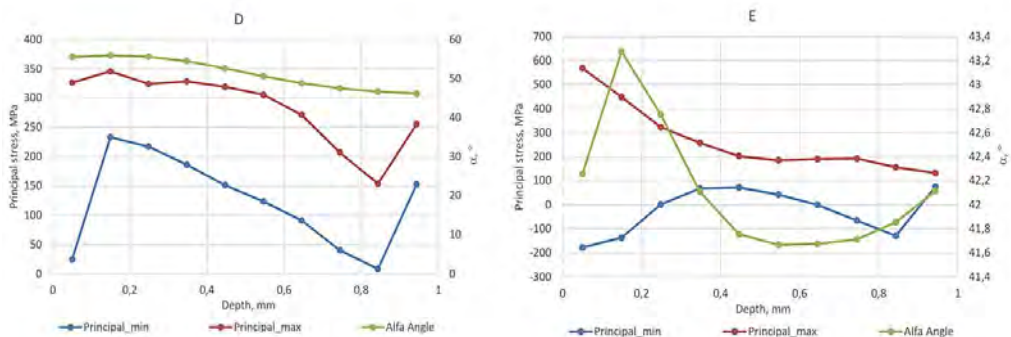
1. instalacija mjernih rozeta na mjerna mjesta D i E,
2. instalacija mehaničkog čepa prema relevantnoj proceduri u cijev naznačenu brojem 1,
3. instalacija mjernih rozeta na mjerna mjesta A, B i C,
4. provedba ciklusa zagrijavanja i hlađenja bloka,
5. instalacija mjernih rozeta na mjerna mjesta F, G i H.

Mjerne rozete korištene u ispitivanju su 1-RY61-1.5/120K [3], [4], a mjerenja su odrađena do dubine od 1 mm sa 10 koraka te s pomakom 0,1 mm/min. Mjerna rozeta i kutevi orijentacije mjerne rozete za svako mjerno mjesto su naznačeni na slici 3.



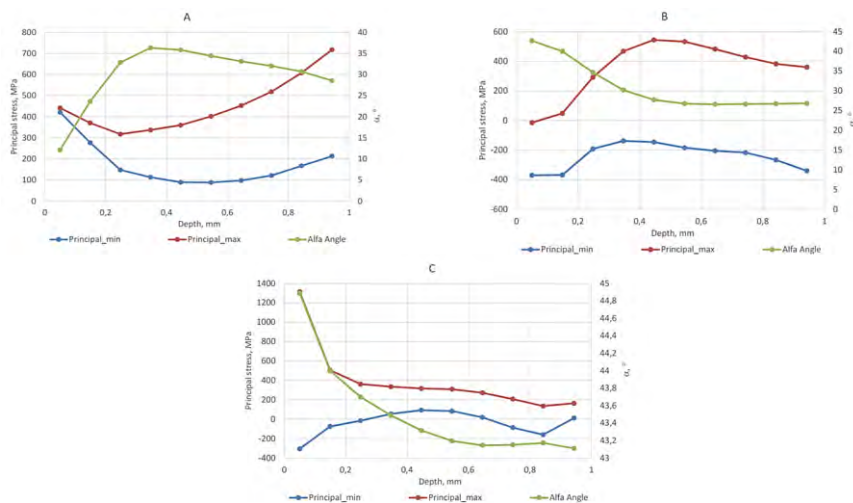
Slika 3. Mjerna rozeta i kutevi orijentacije mjerne rozete za pojedina mjerna mjesta

Instalacija mjernih rozeta na mjerna mjesta D i E služi kako bi se odredilo inicijalno stanje naprezanja na cijevnom bloku prije instalacije mehaničkog čepa uslijed rolanja cijevi i zavarivanja, te su rezultati prikazani na slici 4.



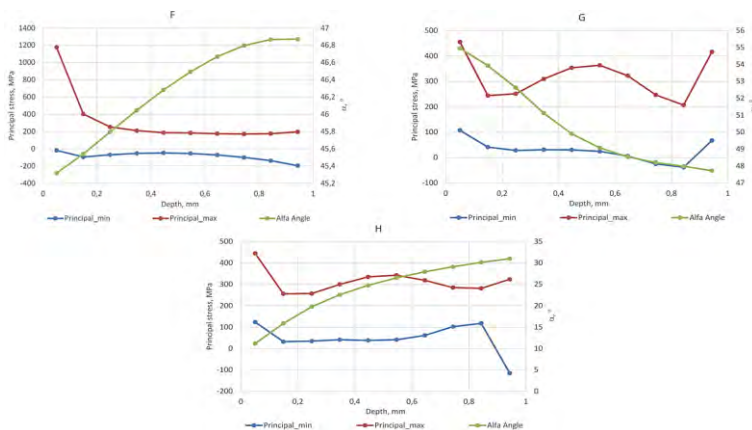
Slika 4. Rezultati zaostalih naprezanja na mjernim mjestima D i E

Poslije instalacije mjernih rozeta na mjestima D i E, instalirao se mehanički čep u središnju cijev, te su instalirane mjerne rozete na mjerna mjesta A, B i C kako bi se odredio direktan utjecaj mehaničkog čepa na raspodjelu naprezanja u području stijenke oko središnje cijevi.



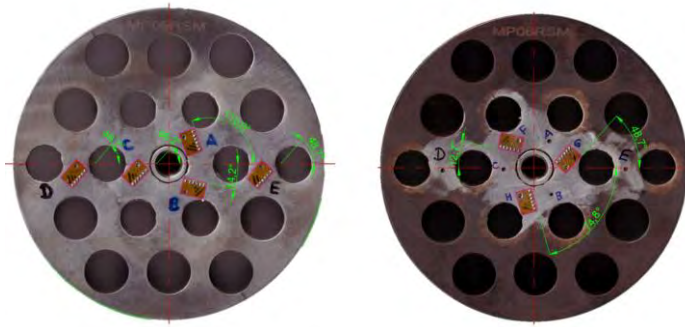
Slika 5. Rezultati zaostalih naprezanja na mjernim mjestima A, B i C

Rezultati mjerenja koji su uzeti u obzir kao relevantni su od dubine 0,25 mm do 0,85 mm, iz razloga što mjerenja na površini mogu ovisiti o nizu parametara, kao što je priprema površine, preciznost instaliranja mjerne rozete, zakrivljenost površine itd., te stoga može doći do nepravilnosti u mjerenjima. Nadalje, zbog zakrivljenosti oboda glodala koje služi za bušenje rupice prilikom mjerenja, preporučuje se područje od 0,85 do 1 mm dubine također izostaviti iz daljnje analize rezultata, jer također može doći do nepouzdanih rezultata mjerenja. Zbog iznimno male površine i širine stijenke na koju se instalira mjerna rozeta, velika pozornost je posvećena orijentaciji mjernih rozeta, te pripremi površine i pravilnoj instalacije mjernih rozeta, kako bi se postigli što pouzdaniji rezultati. Nuklearna elektrana prolazi kroz cikluse paljenja i gašenja, te je odrađen ciklus paljenja i gašenja nuklearne elektrane zagrijavanjem bloka na 350°C, držanjem na toj temperaturi 2 sata i 45 minuta i hlađenjem na 50°C, te držanjem na toj temperaturi 2 sata, kako bi se utvrdio utjecaj grijanja i hlađenja na raspodjelu naprezanja u cijevnoj stijeni. Rezultati određivanja zaostalih naprezanja nakon jednog ciklusa grijanja i hlađenja na mjernim mjestima F, G i H prikazani su na slici 6.



Slika 6. Rezultati zaostalih naprezanja na mjernim mjestima F, G i H

Paljenje i gašenje nuklearne elektrane ima povoljan učinak na zaostala naprezanja, te je vidljivo njihovo smanjenje u odnosu na mjerenja nakon instalacije mehaničkog čepa. Vizualnom kontrolom dodatno je potvrđeno kako mehanički čep nema štetnog utjecaja na cijevnu stijenu i potencijalni nastanak pukotina. Prikaz bloka prije i nakon ciklusa grijanja sa instaliranim mjernim rozetama vidljiv je na slici 7.



Slika 7. Cijevni blok nakon instalacije mehaničkog čepa (lijevo) i nakon ciklusa grijanja i hlađenja (desno)

## 4 Zaključak

Usljed provednog eksperimentalnog određivanja zaostalih naprezanja utvrđeno je kako instalacija mehaničkog čepa u cijevi parogeneratora nema štetan utjecaj na cijevnu stijenu. Dodatno je utvrđeno kako paljenjem i gašenjem nuklearne elektrane dolazi do smanjenja zaostalih naprezanja u stijenci oko začepljene cijevi. Vizualnom kontrolom dodatno je potvrđeno kako ne postoji štetan utjecaj na površinu cijevne stijene, te se ovim testiranjem pokazalo kako je mehanički čep siguran i pouzdan način za čepljenje oštećenih cijevi parogeneratora, bez oštećenja cijevne stijene uz životni vijek mehaničkog čepa od 60 godina zadovoljavajući zahtjeve ASME i RSE-M standarda.

## Literatura

- [1] INETEC – Institut za nuklearnu energiju, Lučko, Hrvatska: *Forerunner* (slika) URL: <https://www.inetec.hr/en/products/robotics/forerunner>.
- [2] ASTM E 837 - 08, "Standard Test Method for Determining Residual Stresses by Hole - Drilling Strain - Gage Method," ASTM International, West Conshohocken, 2008.
- [3] H. a. H. Company, March 2022. [Online]. Available: <https://www.hbm.com/en/3454/strain-gauges-for-residual-stress-measurements/>.
- [4] MTS3000, March 2022. [Online]. Available: <https://www.mts3000.com/product/1-ry61-1-5-120k/>.

# Razvoj rolnih čepova za čepljenje oštećenih cijevi parogeneratora u nuklearnim elektranama

Šarlija, L.<sup>1</sup> i Lesičar, T.<sup>2</sup>

## Sažetak

Nuklearne elektrane predstavljaju postrojenja za proizvodnju električne energije koja ne stvaraju velike količine ugljičnog dioksida. Zbog toga se njihov broj povećava u zemljama s velikom industrijom i populacijom, kako bi se postigla energetska neovisnost zemlje. Iako nuklearne elektrane postoje gotovo 70 godina, još uvijek postoje neriješeni problemi koji zahtijevaju remont i inspekcijske aktivnosti. Jedna od kritičnih komponenti nuklearnog pogona su cijevi parogeneratora koje predstavljaju barijeru između primarnog i sekundarnog kruga. Izloženost cijevi uvjetima koji prevladavaju u parogeneratoru može dovesti do pucanja cijevi, te posljedično curenja radioaktivne vode iz primarnog u sekundarni krug, a odatle dalje u okoliš. Rolani čepovi predstavljaju pouzdano rješenje za čepljenje oštećenih cijevi parogeneratora s mogućnošću lakog i brzog vađenja prilikom potrebe za dodatnom inspekcijom, kao i mogućom provjerom stanja rolanog čepa tijekom rada. U radu je predstavljen razvoj rolnih čepova koji se sastoji od numeričkog modeliranja postupka instalacije i optimiranja dizajna rolanog čepa. Validacija numeričkih analiza će se provesti usporedbom s eksperimentalnim ispitivanjima za svaku pojedinu numeričku simulaciju kako bi se pokazala valjanost dizajna rolanog čepa te parametara instalacije i vađenja.

**Ključne riječi:** parogenerator, rolni čep, numerička analiza, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Luka Šarlija, mag. ing. mech.**, INETEC – Institut za nuklearnu tehnologiju, Dolenica 28, 10250 Lučko, e-mail: luka.sarlija@inetec.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Tomislav Lesičar**, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: tlesicar@fsb.hr

## 1 Uvod

Cijevi PWR („Pressurized Water Reactor“) parogenerators predstavljaju kritičnu komponentu u nuklearnoj elektrani i služe kao barijera između primarnog i sekundarnog kruga te služe za prijenos topline oslobođene nuklearnom fisijom u primarnom krugu na čistu vodu u sekundarnom krugu. Voda u sekundarnom krugu isparava te uzrokuje rotaciju lopatica turbine, koja je povezana na vratilo generatora, koji proizvodi električnu energijom.

Nove generacije nuklearnih elektrana su predviđene za životni vijek od 60 godina. Cijevi parogenerators su izložene nizu mehanizama koji prouzrokuju oštećenja, kao što su visoka temperatura i visoki tlak. Vibracije prouzrokovane strujanjem vode dovode do oštećenja cijevi pa se iz tog razloga koriste antivibracijske ukrute, koje smanjuju pojavu vibracija na cijevima. Same cijevi mogu biti duge oko 25 metara u obliku slova U, ali isto tako stvaraju područja visokog naprezanja koja uzrokuju trošenje i oštećenje cijevi [1].

Najveću opasnost od pucanja cijevi parogenerators predstavlja napetosna korozija prouzrokovana radnim uvjetima primarnog kruga u parogeneratoru, gdje su najveća oštećenja primijećena pri temperaturi medija od 100°C [2]. Iako se cijevi proizvode od čelika Inconel 690 TT koji ima veću otpornost na napetosnu koroziju, problemi se i dalje javljaju te dolazi do pucanja cijevi parogenerators i istjecanja radioaktivne vode, ukoliko se takve cijevi ne saniraju na adekvatan način. Stanje cijevi se provjerava robotskim sustavima i sondama uz pomoć vrtložnih struja, a oštećene cijevi koje prelaze propisane kriterije se začepljuju.

Prvi razvijeni čepovi su bili zavareni, koji nisu imali mogućnost zamjene. Uz pomoć robotskih sustava su se zavarivali na cijevi parogenerators. Međutim, zbog dugotrajne izloženosti koroziji, visokoj temperaturi i tlaku dolazi do pucanja zavara na čepovima, što dovodi do curenja cijevi i ispadanja čepova [3].

Mehanički čepovi su razvijeni kao rješenje za čepljenje oštećenih cijevi parogenerators na način da formiraju s cijevi parogenerators nepropusni spoj. Zbog dizajna nije moguće ispitati stanje mehaničkih čepova, pa je vađenje samih čepova problematično iz razloga što se lako može oštetiti cijev parogenerators.

Trenutno se u nuklearnoj industriji kao pouzdano rješenje koriste rolani čepovi, koji se ugrađuju postupkom rolanja. Rolani čepovi nisu robusni kao mehanički čepovi. Usljed krivog definiranja parametara montaže, može doći do ispadanja rolanih čepova tijekom izloženosti uvjetima u parogeneratoru [4]. Također, zbog krivih parametara instalacije može doći do oštećenja i pucanja susjednih cijevi u parogeneratoru [4]. Voda koja ostane u začepljenoj cijevi prilikom rasta temperature uzrokuje povećanje tlaka, zbog čega opet može doći do pucanja čepa uslijed nepravilnog dizajna [4].



Slika 1. Zavareni čep (lijevo), mehanički čep (sredina), rolani čep (desno)

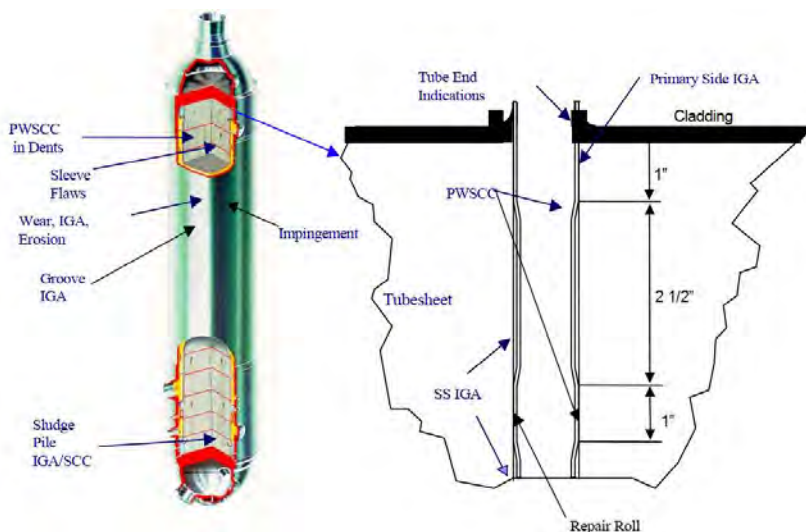


## 2 Razvoj rolanog čepa

Razvoj rolanog čepa predstavlja kompleksan problem zbog velikog broja mehanizama koji utječu na njegov razvoj, eksploataciju, te performanse samog čepa. Pošto se rolni čepovi ugrađuju u oštećene cijevi parogeneratora, razvoj takve komponente je od velike važnosti za sigurnost nuklearne elektrane. Stoga je razvoj rolnih čepova propisan prema ASME i RSE-M standardu koji je važeći za nuklearnu elektranu.

Tijekom životnog vijeka rolanog čepa ne smije doći do curenja, pucanja ili ispadanja čepa, jer bi to dovelo do potencijalnog oštećenja komponenti u primarnom krugu, kao što su gorive šipke u nuklearnom reaktoru. Dodatno, to bi prouzročilo curenje radioaktivne vode i kontaminaciju čiste vode i okoliša. Temeljem navedenih spoznaja važnosti rolanog čepa kao komponente, u ovom radu je prikazan planiran razvoj rolanog čepa kroz izradu doktorske disertacije. Razvoj rolnih čepova podijeljen je u 3 faze koje čine klasični ciklus razvoja komponenti za nuklearne elektrane.

Prva faza obuhvaća pregled literature o uvjetima koji prevladavaju u PWR parogeneratorima. Naglasak će se staviti na prikupljanje podataka o tranzijentima, odnosno odstupanjima tlaka i temperature prilikom paljenja i gašenja nuklearne elektrane te uslijed oštećenja ili nepravilnog rada komponenti [5]. Prilikom istraživanja je potrebno odrediti zahtjeve prema ASME i RSE-M standardima, koji su temelj razvoja rolnih čepova i koji moraju biti zadovoljeni kako bi se rolni čep mogao koristiti u nuklearnim elektranama. Osim navedenoga, provest će se istraživanje dosadašnjeg razvoja rolnih čepova kao i mogućnosti primjene numeričke analize u njihovom razvoju. Pozornost će se posvetiti mehanizmima oštećenja na cijevi parogeneratora i rolnim čepovima, kao što su su pucanje rolnih čepova u području rolanja prilikom ugradnje, nastanak korozije i ispadanje uslijed krivo definiranih parametara ugradnje [4]. Utjecaj napetostne korozije prilikom izlaganja rolanog čepa i cijevi uvjetima u parogeneratoru će biti dodatno proučen, kako bi se dizajn rolanog čepa prilagodio ovom specifičnom mehanizmu oštećenja.



Slika 2. Područje pucanja cijevi uslijed napetostne korozije [4]

Prva faza istraživanja uključuje i primjenu naprednih numeričkih metoda koje razmatraju materijalnu i geometrijsku nelinearnost, te rješavanje problema kontakta. Velika pozornost će se posvetiti i primjeni metode faznog polja kod zamora materijala.

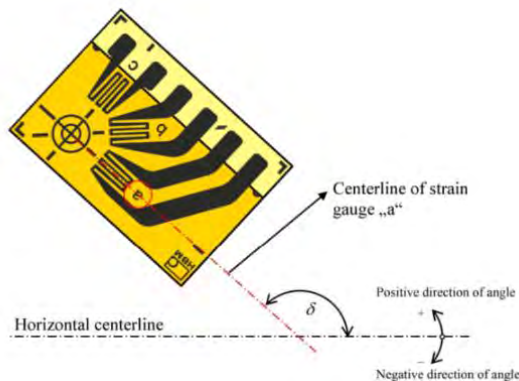
Druga faza istraživanja uključuje razvoj numeričkog modela čepa, uz optimiranje postojećeg dizajna korištenjem programskog paketa ABAQUS. Prilikom optimiranja, uz opterećenja kojima je čep izložen prilikom eksploatacije, dodatno će se razmatrati zahtjevi ASME i RSE-M standarda za testiranje sustava pri visokom tlaku, koji propisuju da rolani čep mora izdržati tlak od 25,68 MPa, za razliku od tlaka koji prevladava u parogeneratoru, a iznosi oko 16 MPa, radi postizanja dovoljnog faktora sigurnosti. Razmatrat će se montaža čepova u različite promjere cijevi, pri čemu će materijal cijevi biti čelik Inconel 690 TT i Incoloy 800.

Montaža rolanog čepa se provodi postupkom rolanja. Zbog kompleksnosti postupka, u numeričkim simulacijama postupak će biti pojednostavljen. Dodatni uvjet na dizajn rolanog čepa i parametre montaže predstavlja potencijalni nastanak koncentracije naprezanja u stijenkama cijevi parogeneratora te nastanak mikropukotina, stoga je cilj postići što manja naprezanja prilikom montaže čepa. Korištenjem metode faznog polja, koja pouzdano opisuje zamor i lom materijala, bit će provedena numerička simulacija niskocikličkog zamora materijala na rolanom čepu predviđenom za životni vijek od 60 godina. Kako je rolani čep izložen visokoj dozi radijacije, u obzir treba uzeti i radijacijsku krutost, koja smanjuje duktilnost materijala [6].

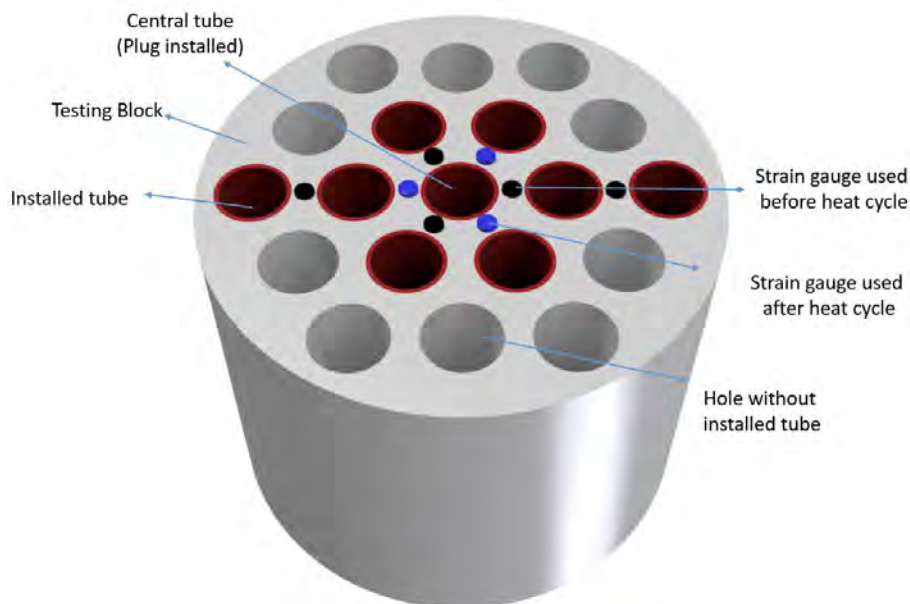
Osim procesa montaže, provest će se simulacija postupka vađenja rolanog čepa, koja uključuje provedbu toplinske relaksacije te izvlačenja čepa. Pritom će se razmatrati utjecaj pojedinih parametara na postupak toplinske relaksacije, koji će biti korišteni nakon validacije za buduće postupke vađenja, kako bi se optimirao postupak radi postizanja što manje mogućnosti oštećenja cijevi parogeneratora.

Treća faza istraživanja uključuje provedbu eksperimentalnih ispitivanja i validaciju numeričkih rezultata. Testiranje mogućnosti brtvljenja rolanog čepa bit će provedeno hidrotetom do maksimalnog tlaka 1000 bara, kako bi se simulirao utjecaj visokog tlaka i odredio maksimalni tlak koji rolani čep može izdržati. Osim hidroteta, provest će se helij test kako bi se odredila nepropusnost spoja pri prodiranju malih čestica, koji mora zadovoljiti zahtjeve ASME i RSE-M standarda.

Provedba eksperimentalnog ispitivanja bazirana je na ASTM E837 standardu primjenom tenzometara, za kritična mjesta oko središnje cijevi kako bi se odredio utjecaj rolanog čepa na stijenku cijevi i stanje naprezanja nakon provedenog grijanja i hlađenja bloka.



Slika 3. Mjerna rozeta 1-RY61-1.5/120K [7], [8]



Slika 4. Cijevni blok za provedbu tenzometrijskog ispitivanja

Potvrda valjanosti dizajna rolanog čepa i parametara instalacije bit će provedena rezanjem triju monitoranih čepova, na kojim će biti mjerena mikrotvrdoća uz provedbu metalografskog ispitivanja kontaktnog područja čepa i cijevi. Uz to, provest će se eksperimentalno ispitivanje zamora materijala korištenjem pulzatora.

Posljednji dio eksperimentalnih ispitivanja odnosi se na postupak vađenja montiranih čepova, što uključuje korištenje sustava za grijanje rolanih čepova te kidalice za čupanje čepova. Tenzometrijskim određivanjem zaostalih napreznja nakon vađenja čepa iz cijevi u cijevnom bloku odredit će se utjecaj na cijevnu stijenku.

### 3 Zaključak

Razvoj rolanih čepova predstavlja kompleksan problem zbog mnogobrojnih mehanizama i složenih opterećenja koja djeluju na čep. Iz tog razloga se velika pozornost posvećuje numeričkom modeliranju ponašanja čepova, kako bi se pravilno optimirao dizajn i osigurala valjanost parametara instalacije. Rezultat doktorskog rada bit će poboljšani dizajn rolanog čepa. Precizniji numerički model će pravilnije opisivati ponašanje čepa, pri čemu će se razmatrati i utjecaj zamornog ponašanja primjenom metode faznog polja. Optimirani dizajn rolanog čepa omogućit će bržu ugradnju čepa u cijev, a time i manju izloženost radnika štetnoj radijaciji, niže troškove inspeksijskih aktivnosti, uz postizanje brtvljenja sa životnim vijekom od 60 godina, koji je u skladu s novom generacijom nuklearnih elektrana.

---

**Literatura**

- [1] Guo, K., Jiang, N. B., Qi, H. H., Feng, Z. P., Wang, Y. i Tan, W.; Experimental investigation of impact-sliding interaction and fretting wear between tubes and anti-vibration bars in steam generators; *Nuclear Engineering and Technology*; 2020.; 52; 6; 1304-1317; doi: 10.1016/j.net.2019.11.014.
- [2] Liu, X. C. et al., "Effects of Temperature on Fretting Corrosion Between Alloy 690TT and 405 Stainless Steel in Pure Water," *Acta Metallurgica Sinica-English Letters*; 2019; 32; 12; 1437-1448, Dec 2019, doi: 10.1007/s40195-019-00929-9.
- [3] INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, "Assessment and Management of Ageing of Major Nuclear Power Plant Components Important to Safety: Steam Generators," *IAEA-TECDOC-1668*, IAEA, Vienna (2011).
- [4] Electric Power Research Institute, "Three Mile Island Plugged Tube Severance: A Study of Damage Mechanisms," Palo Alto, CA:2003. 1008438.
- [5] Zhao, X. H. et al., "The development of high fidelity Steam Generator three dimensional thermal hydraulic coupling code: STAF-CT," *Nuclear Engineering and Technology*; 2021.; 53; 3; 763-775; doi: 10.1016/j.net.2020.07.043.
- [6] Xiao, X. Z., "Fundamental Mechanisms for Irradiation-Hardening and Embrittlement: A Review," *Metals*; 2019; 9; 10; Art no. 1132, doi: 10.3390/met9101132.
- [7] H. a. H. Company, March 2022. [Online]. Available: <https://www.hbm.com/en/3454/strain-gauges-for-residual-stress-measurements/>.
- [8] MTS3000, March 2022. [Online]. Available: <https://www.mts3000.com/product/1-ry61-1-5-120k/>.

# Karakterizacija i modeliranje raslojavanja lijepljenih spojeva ovisnog o brzini

Škec, L.<sup>1</sup> i Alfano, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U radu je u najkraćim crtama predstavljen efikasni numerički model za simulaciju raslojavanja lijepljenih spojeva ovisnog o brzini nanošenja opterećenja. Radi se o kombinaciji Timošenkovih grednih konačnih elemenata i veznih (kontaktnih) elemenata baziranih na modelu kohezivne zone u kojima je u obzir uzeto viskoelastično ponašanje lijepila te oštećenje istog. Na temelju rezultata eksperimenata kojima je ispitano ponašanje prilikom raslojavanja aluminijskih lijepljenih spojeva pri 6 različitim brzinama nanošenja opterećenja, pokazano je da numerički model s istim setom parametara može s velikom točnošću simulirati ponašanje uzoraka prilikom raslojavanja pri svim ispitanim brzinama. Naknadno su u numeričkom modelu dodatno uzete u obzir i nesavršenosti u izvedbi lijepljenog spoja (šupljine i odljepljivanje s aluminijske podloge) čime je omogućeno aproksimiranje efektivnih parametara lijepila i još preciznije simuliranje dobivenih eksperimentalnih krivulja sila-pomak.

**Ključne riječi:** lijepljeni spojevi, raslojavanje, eksperiment, numerički model, viskoelastičnost, oštećenje

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. Leo Škec, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Katedra za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: leo.skec@uniri.hr

<sup>2</sup> dr. Giulio Alfano, Reader - Mechanical Engineering PGR Director, Brunel University, College of Engineering, Design and Physical Sciences, Kingston Lane, UB8 3PH Uxbridge, e-mail: giulio.alfano@brunel.ac.uk

## 1 Uvod

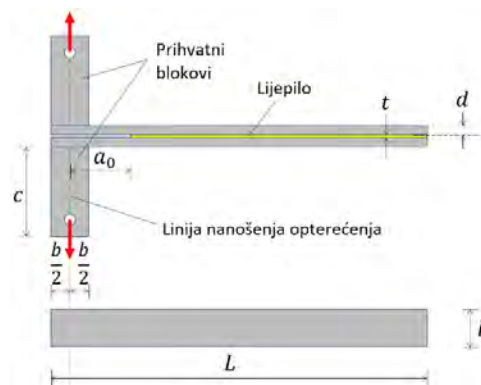
Lijepljeni spojevi se danas naširoko koriste za spajanje konstrukcijskih elemenata u raznim suvremenim industrijama kao što su zrakoplovna, automobilska, ambalažna i građevinarstvo. Raslojavanje (delaminacija) ili odljepljivanje dvaju ili više susjednih konstrukcijskih elemenata jedan je od najčešćih mehanizama sloma u lijepljenim konstrukcijskim sustavima. Razumijevanje ponašanja ljepljivih spojeva, temeljeno na eksperimentima i računalnim simulacijama, stoga je od ključne važnosti za praćenje sve bržeg tehnološkog razvoja i novih sigurnosnih zahtjeva.

Industrijska ljepila uglavnom su epoksidi ili poliuretani koji pripadaju obitelji termoreaktivnih polimera koji imaju izrazito umreženu mikrostrukturu i poznati su po ovisnosti o brzini opterećenja, odnosno promjeni lomne otpornosti s brzinom deformacije. U suvremenom inženjerstvu danas postoji veliki interes za modele koji mogu točno i efikasno predvidjeti ponašanje lijepljenih spojeva (s mogućim raslojavanjem) ovisno o brzini nanošenja opterećenja.

U ovom radu će ukratko biti predstavljen numerički model za simuliranje testa dvostruke konzole (eng. *double cantilever beam – DCB*), standardiziranog testa putem kojeg se određuje lomna otpornost ljepila u modu I, tj. pri odljepljivanju normalnom separacijom spojenih elemenata. Prikazati će se usporedba eksperimentalnih rezultata s predikcijama numeričkog modela pri 6 različitih brzina nanošenja opterećenja. U nastavku će biti objašnjeno kako se u modelu mogu uzeti u obzir i nesavršenosti u izvedbi lijepljenog spoja za koje će se dokazati da imaju značajan utjecaj na konačne srednje vrijednosti lomne otpornosti te oblik krivulja sila-pomak. Na koncu će se dati zaključak i smjernice za daljnji rad.

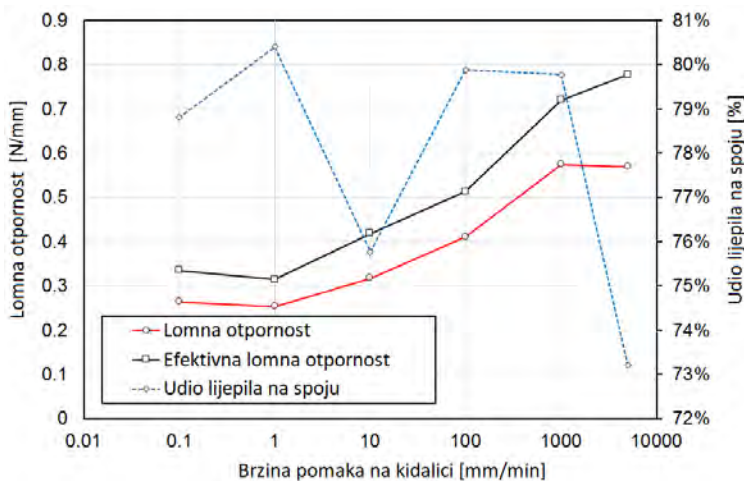
## 2 Rezultati eksperimenata

Shematski prikaz uzorka ispitanog testom dvostruke konzole dan je na Slici 1. Uzorak se sastoji od dvije jednake aluminijske ploče dimenzija  $L = 250$  mm,  $B = 25.4$  mm i  $d = 6.35$  mm koje se na čeljusti kidalice pričvršćuju putem prihvatnih blokova. Otvaranje čeljusti kidalice konstantnom brzinom uzrokuje odvajanje ploča te propagaciju pukotine od početne pozicije ( $a_0 = 40$  mm) prema desnom rubu uzorka. U radu je korišteno ljepilo Araldite® 2015.



Slika 1. Prikaz uzorka ispitanog testom dvostruke konzole

Utjecaj debljine sloja lijepila, čija je prosječna debljina  $t = 0.2$  mm, u ovom radu nije ispitivana niti je uzeta u obzir u numeričkom modelu. Ispitivanja su se provela za 6 različitih brzina pomaka kidalice i to 0.1, 1, 10, 100, 1000 i 5000 mm/min. Za svaku brzinu ispitana su 4 uzorka te je na temelju dobivenih rezultata za svaku ispitanu brzinu određena prosječna krivulja sila-pomak (Slika 3). Primijećeno je da povećanjem brzine dolazi do veće lomne otpornosti lijepila, što znači da je potrebna veća sila za odljepljivanje ploča (vidi crvenu liniju na Slici 2). Detaljni uvid u eksperimentalne rezultate i izračunate vrijednosti lomne otpornosti dan je u [1].



Slika 2. Ovisnost lomne otpornosti o brzini nanošenja opterećenja. Efektivna lomna otpornost uzima u obzir raspodjelu (udio) lijepila na spoju.

### 3 Numerički model

Za potrebe numeričkih simulacija modelirana je samo gornja polovica uzorka, obzirom da ravnina simetrije prolazi sredinom sloja lijepila (vidi Sliku 1). Prihvatni blokovi nisu modelirani te se pomak u smjeru linije nanošenja opterećenja u modelu zadaje direktno na aluminijsku ploču. U [1] je pokazano i da se utjecaj prihvatnih blokova na izračunate vrijednosti lomne otpornosti može zanemariti. Aluminijske ploče su modelirane nizom dvočvornih Timošenkovih grednih konačnih elemenata, kod kojih je uzet u obzir i utjecaj smicanja. To svojstvo ne dolazi do izražaja kod aluminijskih ploča, ali, kao što je pokazano u [2], može imati značajniji utjecaj na rezultate kod materijala kao što su kompoziti s karbonskim vlaknima. Obzirom da kod testa dvostruke konzole dolazi samo do normalne separacije ploča, u modelu je dovoljno uzeti vertikalni pomak i zaokret poprečnog presjeka kao čvorne stupnjeve slobode. Stoga, takav dvočvorni Timošenkov konačni element ima 4 stupnja slobode.

Utjecaj lijepila nije u model uključen, kako je to često praksa, uvođenjem dodatnih veznih ili kontaktnih (eng. *interface*) elemenata, već je djelovanje lijepila na aluminijsku ploču prikazano kao promjenjivo kontinuirano opterećenje na gredni element. Na taj se način u model ne uvode novi čvorovi ili stupnjevi slobode. Veličina tog opterećenja ovisna je o relativnom pomaku aluminijskih ploča, što je standardni pristup koji se koristi u modelima kohezivne zone (eng.

*cohesive zone models – CZM*). Veza između naprezanja koje se stvara u lijepljenom sloju i relativnog pomaka aluminijskih ploča definirana je kombinacijom bi-linearnog konstitutivnog zakona s oštećenjem i viskoelastičnog reološkog modela baziranog na Zenerovom modelu kod kojeg je linearno prigušenje zamijenjeno tzv. Scott-Blair elementom s frakcionalnom derivacijom pomaka po vremenu. Kao što je detaljnije objašnjeno u [3], takav reološki model dobro opisuje ponašanje polimera koristeći pritom relativno mali broj parametara. Model pretpostavlja da se lomna otpornost lijepila monotono povećava između donje („spore“) i gornje („brze“) granice. Takav model lijepila ima ukupno 7 parametara, od kojih se većina mogu odrediti automatski. Postupak identifikacije parametara modela detaljno je opisan u [1].

Usporedba eksperimentalnih krivulja sila-pomak te predikcija modela dana je na Slici 3. Može se primijetiti kako s istim setom od 7 parametara model može precizno predvidjeti ponašanje prilikom raslojavanja aluminijskog lijepljenog spoja pri 6 različitih brzina nanošenja opterećenja.

## 4 Utjecaj nesavršenosti lijepljenog spoja

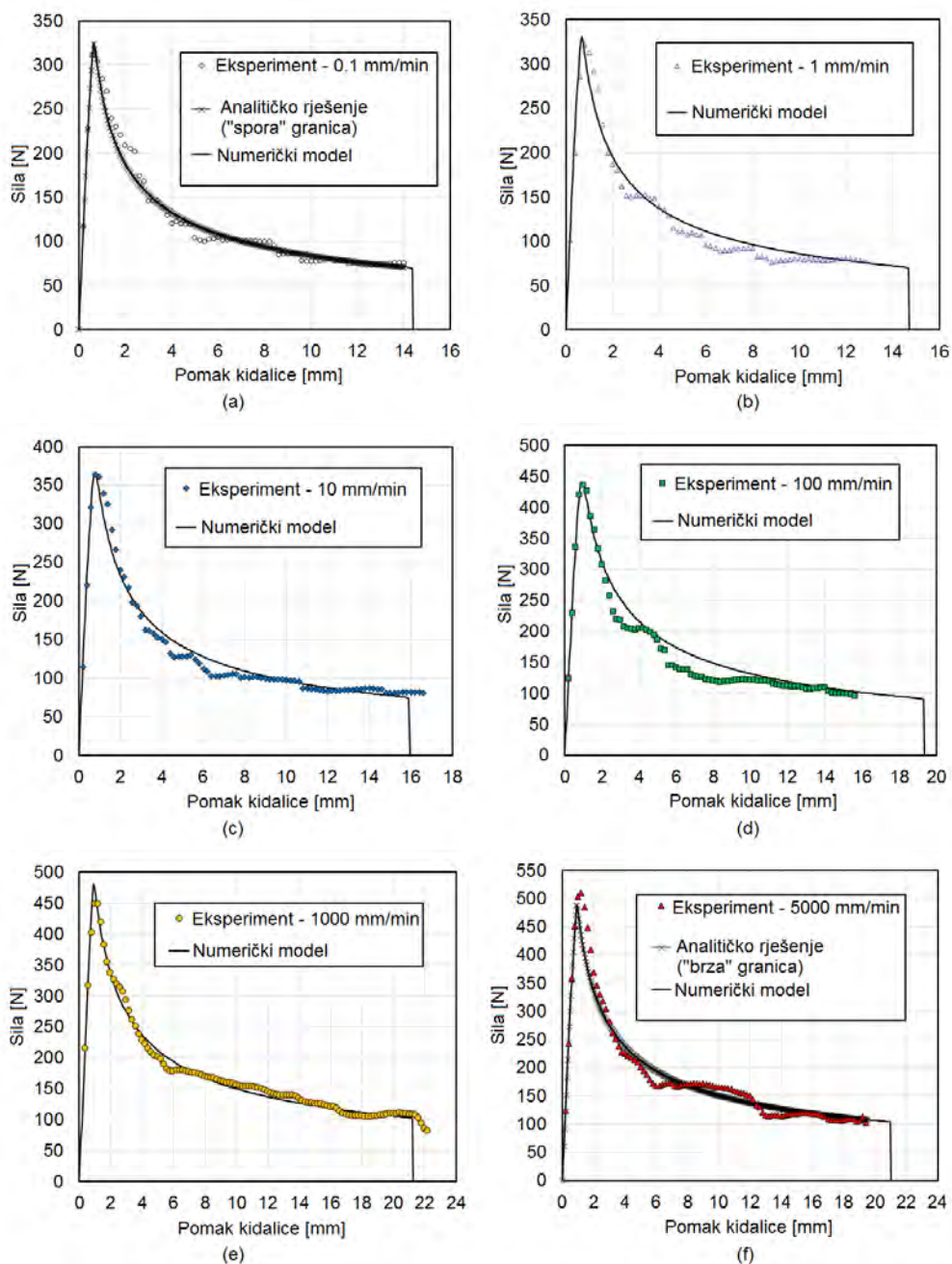
Tijekom provedbe eksperimenata primijećeno je da na lomnoj plohi odljepljenih uzoraka postoje određene nesavršenosti. U prvom redu to su šupljine koje se prepoznaje po tome što, za razliku od slomljenog lijepila, imaju glatku sjajnu površinu koja je za istu šupljinu identična na obje ploče. Pretpostavlja se da je uzrok nastajanja tih šupljina zrak zarobljen prilikom spajanja ploča i/ili skupljanje lijepila prilikom sušenja, međutim u sklopu ovog rada to nije istraženo. Uz to, na lomnoj plohi primijećeno je u manjoj mjeri i mjestimično odljepljivanje lijepila s aluminijskog zbog nedostatka adhezije pri čemu nije došlo do sloma lijepila. To se prepoznaje kada unutar lomne plohe vidimo površinu aluminijskog, a na suprotnoj ploči na tom mjestu vidimo lijepilo.

Za obje vrste nesavršenosti zajedničko je to da pod svjetlošću sjaje pa ih je na fotografijama relativno lako prepoznati. Odgovarajućom obradom i post-procesiranjem fotografija moguće je dobiti udio nesavršenosti na gornjoj i donjoj lomnoj plohi te dobiti prosječnu raspodjelu nesavršenosti uzduž lomne plohe, što je prikazano na Slici 4. Detalji o obradi i post-procesiranju fotografija biti će objavljeni u originalnom znanstvenom radu koji je trenutno u fazi recenzije.

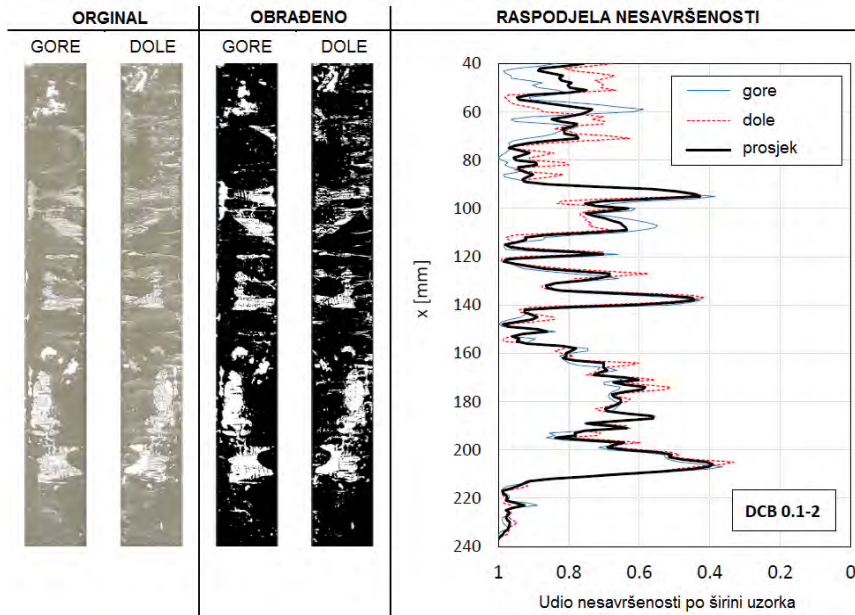
Za svaki uzorak se za prosječnu raspodjelu nesavršenosti uzduž lijepljenog sloja (poput one prikazane na Slici 4) može odrediti srednja vrijednost. Nakon toga se može se odrediti srednja vrijednost za 4 uzorka za svaku brzinu, što je prikazano plavom linijom na Slici 2. Može se primijetiti da za brzinu 5000 mm/min nesavršenosti u prosjeku pokrivaju više od četvrtine lijepljene plohe, a u najboljem slučaju (za brzinu 1 mm/min) to je nešto manje od petine. Te se nesavršenosti mogu uzeti u obzir kod računanja lomne otpornosti, čime se dobiva tzv. efektivna lomna otpornost, koja je, kao što se vidi na Slici 2, veća od one određene na standardni način.

Dobivenu raspodjelu nesavršenosti uzduž lijepljenog sloja, kako za pojedine uzorke tako i za prosjeke za svaku brzinu, može se koristiti u numeričkom modelu tako da se za poznati udio nesavršenosti reducira širina lijepljenog sloja. Iako je model jednodimenzionalan, širinu lijepljenog sloja, za koju se inače pretpostavlja da je jednaka širini uzorka, može se varirati u svakoj integracijskoj točki. To modelu omogućava reproduciranje „hrapavih“ krivulja sila pomak kakve se obično dobivaju u eksperimentima. Iako ti rezultati ovdje nisu prikazani zbog nedostatka prostora, iz njih je jasno vidljiva veza između raspodjele nesavršenosti na lijepljenom sloju i fluktuacija na krivulji sila-pomak.





Slika 3. Usporedba eksperimentalnih rezultata s predikcijama numeričkom modela za brzinu pomaka kidalice: a) 0.1 mm/min, b) 1 mm/min, c) 10 mm/min, d) 100 mm/min, e) 1000 mm/min i f) 5000 mm/min.



Slika 4. Procedura određivanja raspodjele nesavršenosti na lijepljenom sloju koristeći fotografije lomnih ploha jednog reprezentativnog uzorka

## 4 Zaključak

U radu je prikazana karakterizacija lomne otpornosti lijepljenog aluminijskog spoja ovisno o brzini nanošenja opterećenja. Uočena je značajna ovisnost lomne otpornosti ispitanih lijepila o brzini nanošenja opterećenja. Numerički model, koji je objašnjen u najkraćim crtama, ima sposobnost precizno simulirati ponašanje tijekom raslojavanja lijepljenog spoja ovisno o brzini nanošenja opterećenja koristeći pritom isti set od 7 parametara. Nesavršenosti lijepljenog spoja, koje u ispitanim uzorcima nisu zanemarive, mogu se također implementirati u numerički model. Na taj se način može još preciznije modelirati stvarni oblik krivulje sila pomak, ali i odrediti tzv. efektivnu lomnu otpornost. Na temu efektivne lomne otpornosti i modeliranja nesavršenosti napisan je originalni znanstveni rad koji je trenutno u fazi recenzije. U planu je preciznija analiza lomnih ploha koristeći 3D skeniranje te proučavanje utjecaja hrapavosti na lomnu otpornost.

## Literatura

- [1] Škec, L. i Alfano, G.; Experimental and numerical study of rate-dependent mode-I failure of a structural adhesive; *The Journal of Adhesion*; 2023; 99(8); 1323–1355.
- [2] Ranjbar, M., Škec, L., Jelenić, G. i Ribarić, D.; Mixed-mode delamination of layered structures modeled as Timoshenko beams with linked interpolation; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 2023; 124(8); 1773–1797.
- [3] Musto, M. i Alfano, G.; A Fractional Rate-dependent Cohesive-zone Model; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 2015; 105(5); 313–341.

# Obogaćeni kontinuum element s ugrađenim jakim diskontinuitetom za prikaz kvazi-krhkog sloma u mezostrukтури

Šodan, M.<sup>1</sup>, Nikolić, M.<sup>2</sup> i Stanic, A.<sup>3</sup>

## Sažetak

Ovaj rad predstavlja novi 2D kontinuum element, obogaćen nekompatibilnim modovima s ugrađen jakim diskontinuitetom, koji učinkovito simulira pucanje inducirano vlačnim i tlačnim opterećenjem kvazi-krhkih heterogenih materijala koje ovisi o građi mezostrukture. Predloženi model eliminira potrebu za algoritmima za praćenje pukotina primjenom lokalnih postupaka sloma na Gaussovima točkama integracije. Postupci sloma prilagođeni su kriterijima vlačnog, posmičnog i tlačnog pucanja koji omogućuju da vrijeme nastanka, lokacija i orijentacija pukotine ovisi isključivo o stanju naprežanja unutar konačnog elementa. Ovaj pristup osigurava precizno i prirodno nastajanje raznih vrsta pukotina unutar komponenata heterogenih materijala.

**Ključne riječi:** modeliranje pukotina, kvazi-krhki materijali, mezostrukтура, četveročvorni konačni elementi, ugrađeni jaki diskontinuiteti.

---

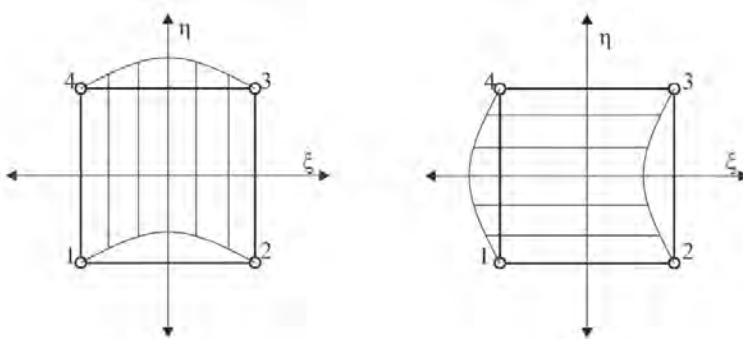
<sup>1</sup> **Matej Šodan, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: msodan@gradst.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Mijo Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: mijo.nikolic@gradst.hr

<sup>3</sup> **doc. dr. sc. Andjelka Stanic**, Applied Mechanics and Data Analysis, Faculty of Engineering Technology, University of Twente, Drienerlolaan 5, 7552 NB Enschede e-mail: andjelka.stanic@gmail.com

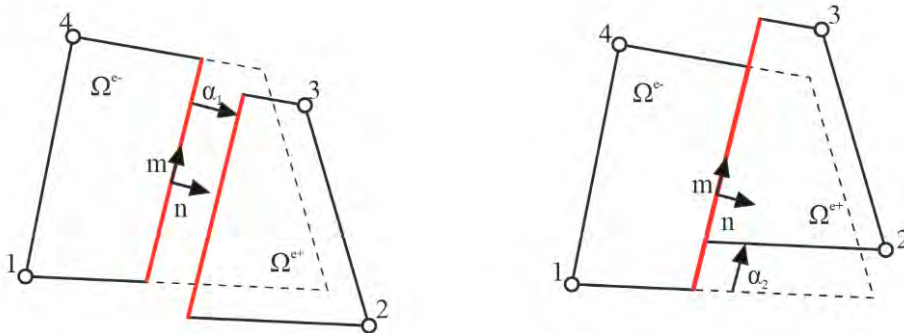
## 1 Obogaćeni četveročvorni konačni element

Poznato je da četveročvorni konačni element doživljava efekt zaključavanje (locking) posmičnih naprezanja tijekom uvjeta savijanja, što dovodi do nepouzdanih rezultata naprezanja u modelu [2]. Stoga je unutar elementa ugrađena metoda nekompatibilnih modova kako bi se osiguralo precizniji izračun stanja naprezanja u simulacijama propagiranja pukotina u heterogenim materijalima. Ova metoda je temeljena na Hu-Washizuov varijacijskom principu, te u osnovi obogaćuje polje pomaka dodatnim interpolacijskim funkcijama [1]. Na slici 1. su prikazane interpolacijske funkcije nekompatibilnih modova.



Slika 1. Interpolacijske funkcije nekompatibilnih modova: a)  $M_1 = 1 - \xi^2$ ; b)  $M_2 = 1 - \eta^2$

Kako bi se modeliralo nastajanje pukotina unutar elemenata, ugrađena je metoda jakih diskontinuiteta sa statičkim i kinematički optimalnom nesimetričnom formulacijom (SKON) [3]. Ovakav pristup se pokazao učinkovit kod simuliranja pukotina na makro razini, pritom demonstrirajući povoljne karakteristike u ublažavanju učinaka zaključavanja naprezanja uslijed propagiranja pukotina. U četveročvornom elementu se ugrađuje linija diskontinuiteta koja dijeli domenu elementa u dvije poddomene  $\Omega^{e+}$  i  $\Omega^{e-}$ , uz koju se ostvaruje pucanje elementa. Za simuliranje odvajanja navedenih poddomena su odabrana dva konstantna moda: konstantni mod I i konstantni mod II. Prvi mod opisuje otvaranje i zatvaranje pukotine u normalnom smjeru, dok drugi mod opisuje posmično klizanje duž linije diskontinuiteta [4]. Na slici 2. su prikazani navedeni modovi odvajanja.



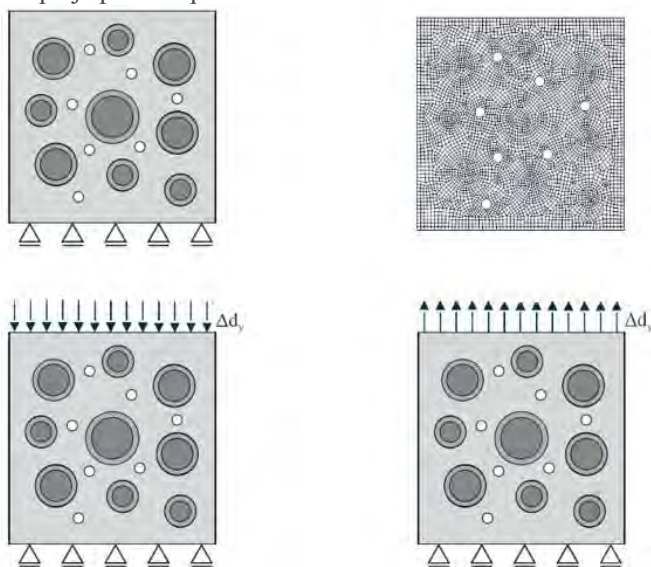
Slika 2. Modovi odvajanja elementa: a) Vlačni mod odvajanja; b) Posmični mod klizanja

## 2 Inicijacija pukotina u elementu

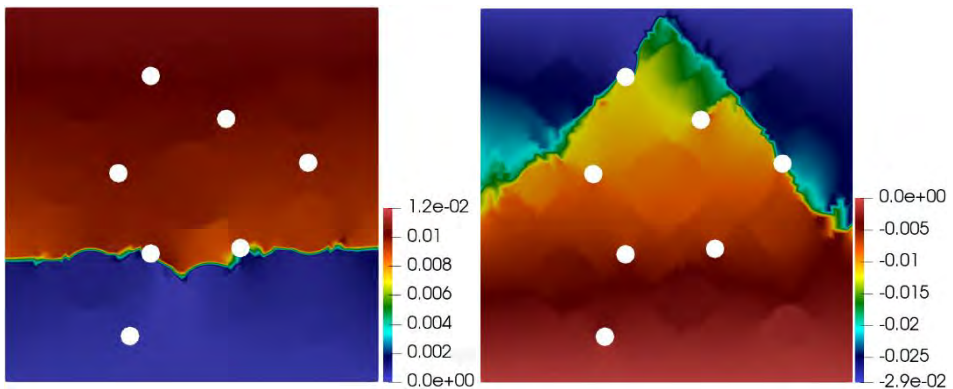
Nastajanje i propagacija pukotina unutar elementa ovisi samo o stanjima napreznja te na takav način omogućuje precizno i prirodno nastajanje i propagiranje pukotina unutar materijala. To je omogućeno upotrebom kriterija loma koja se temelji na Gaussovima točkama integracije. Naime, vrijeme, mjesto i orijentacija pukotine unutar svakoga elementa ovisi samo o stanju napreznja tog promatranog elementa, koje definira lokaciju i orijentaciju pukotine. Tako ugrađena pukotina sa svojom zadanom geometrijom do kraja simulacije ostaje nepromijenjena, ali se njeni načini odvajanja mogu mijenjati. Tako je omogućeno ostvarivanje samo jednog tipa pukotine u svakome elementu, ali tijekom jednog koraka simulacije može doći do nastajanja više pukotina u cijelom uzorku. Što se tiče vrste nastalih pukotine, u svakom koraku simulacije se provjeravaju čitavi elementi za uvjete vlačnog, posmičnog i tlačnog pucanja. Implementacijom sva tri uvjeta je omogućena simulacija pucanja materijala za inducirana vlačna i tlačna djelovanja.

## 3 Rezultati

Na slici 3. je prikazan jedan heterogeni uzorak materijala zajedno s korištenom mrežom konačnih elemenata i načinima opterećenja. Materijal se sastoji od više konstituenata: agregata, zona cementne paste oko agregata, cementne paste i pora. Takav uzorak je opterećen vlačno i tlačno, te su finalni rezultati polja pomaka prikazani na slici 4.



Slika 3. Heterogeni materijal s mrežom konačnih elemenata i shemama opterećenja



Slika 4. Finalno stanje vertikalnog polja pomaka: a) Vlačni test; b) Tlačni test

Usljed vlačnoga djelovanja inicijacija vlačnih pukotina se prvo ostvaruje u zonama cemente paste oko agregata, kao mjesta najslabijih karakteristika te oko pora. Daljnjim opterećenjem nastale pore propagiraju, spajaju se i formiraju makro pukotinu vidljivu na slici 4a. Što se tiče tlačnog djelovanja, prvo nastaju posmične pukotine u zonama oko agregata te vlačne pukotine oko pora. Daljnjim porastom napreznja, posmične pukotine izdominiraju i propagiraju oko agregata te formiraju dvije makro pukotine koje se spajaju pri vrhu uzorka, što je vidljivo na slici 4b.

## Zahvale

Prezentirano istraživanje je financirala Hrvatska zaklada za znanost u sklopu rada na projektu HRZZ-UIP-2020-02-6693 'Metodologija za procjenu parametara u problemima propagacije pukotina nastalih pod utjecajem ekstremnih mehaničkih opterećenja'. Parcijalna financijska potpora dobivena je i projektom Hrvatske vlade i Europske unije iz Operativnog programa kompetitivnosti i kohezije (Projekt KK.01.1.1.02.0027).

## Literatura

- [1] Ibrahimbegovic, A.; *Nonlinear Solid Mechanics; Solid Mechanics and its Applications*; 2009.
- [2] Simo, J. C. i Rifai, M.S.; *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 1990; 29(8); 1595-1638.
- [3] Jirasek, M.; *Comparative study on finite elements with embedded discontinuities*; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 2000; 188; 307-330.
- [4] Stanic, A., Brank, B., Ibrahimbegovic, A. i Matthies, H.; *Crack propagation simulation without crack tracking algorithm: Embedded discontinuity formulation with incompatible modes*; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 2021; 386; 114090.

# Analiza naprežanja dimnocijevnog parnog kotla metodom konačnih elemenata

Tomorad, J.<sup>1</sup> i Skozrit, I.<sup>2</sup>

## Sažetak

U radu je izvršena analiza naprežanja dimnocijevnog parnog kotla pri radnom opterećenju pomoću metode konačnih elemenata. Model kotla izrađen je u programskom paketu Autodesk Inventor i potom analiziran u Inventor Nastran-u. Analiza je napravljena prema postojećoj izvedbi dimnocijevnog parnog kotla konstruiranog prema HRN EN 12953-3:2016.

Za proračun čvrstoće primijenjen je analitički pristup konstruiranju definiran aneksom C norme HRN EN 13445-3:2021 pomoću metode temeljene na kategorizaciji naprežanja. U ovom radu razvijena je metodologija proračuna prema navedenoj normi usklađena s opcijama i izlaznim podacima dostupnim u korištenom programskom paketu. Provedena je linearizacija naprežanja na kritičnim lokacijama u kotlu te na kraju i evaluacija naprežanja čitave konstrukcije prema zadanoj normi.

**Ključne riječi:** dimnocijevni parni kotao, metoda konačnih elemenata, Inventor Nastran, proračun čvrstoće, metoda temeljena na kategorizaciji naprežanja, aneks C norme HRN EN 13445-3:2021, HRN EN 12953-3:2016

---

<sup>1</sup> **Jura Tomorad, univ. spec. mech. et nav. arch.,** TPK Orometal d.d., Ulica Milana Prpića 118, 49243, Oroslavje, e-mail: jura.tomorad@tpk-orumetal.hr

<sup>2</sup> **izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit,** Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Ulica Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: Ivica.Skozrit@fsb.hr

## 1 Uvod

Predmet analize ovoga rada je proračun čvrstoće dimnocijevnog parnog kotla loženog biomasom. Kao ulazni podatak korištena je projektna dokumentacija sastavljena prema HRN EN 12953-5:2020 [1] koja sadrži crteže, proračun metodom DBF (*Design by Formulae*), certifikate materijala, itd. Proračun čvrstoće proveden je pristupom DBA (*Design by Analysis*) prema HRN EN 13445-3:2021 [2] metodom temeljenom na kategorizaciji naprezanja (*Method Based on Stress Categories*). Spomenuta metoda, poznata kao "analiza naprezanja", uključuje tumačenje naprezanja izračunatih na elastičnoj osnovi u bilo kojoj točki u posudi, a zatim provjeru njihove prihvatljivosti pomoću odgovarajućih kriterija procjene. Za izračun naprezanja korištena je metoda konačnih elemenata. Namjena kotla je proizvodnja suhozasićene vodene pare na pretlaku od 22 bar(g). Kotao je konstruiran prema tehničkim zahtjevima europske norme HRN EN 12953-3:2016 [3]. Budući da spada u tlačnu opremu, podliježe pravilima i zahtjevima europske direktive PED 2014/68/EU [4].

Neovisno o načinu loženja, koje može biti plinskim gorivom, kapljevitim gorivom i biomasom, princip rada dimnocijevnih parnih kotlova jednak je sa strane prijenosa topline. Izgaranjem goriva formiraju se dimni plinovi koji svojim strujanjem kroz parni kotao predaju toplinu vodi kroz ogrjevnu površinu. Vodi na račun primljene topline raste temperatura do temperature zasićenja. Proizvedena suhozasićena para se parnim cjevovodom dovodi do potrošača. Tablica 1. prikazuje konstrukcijske podatke zadanog parnog kotla.

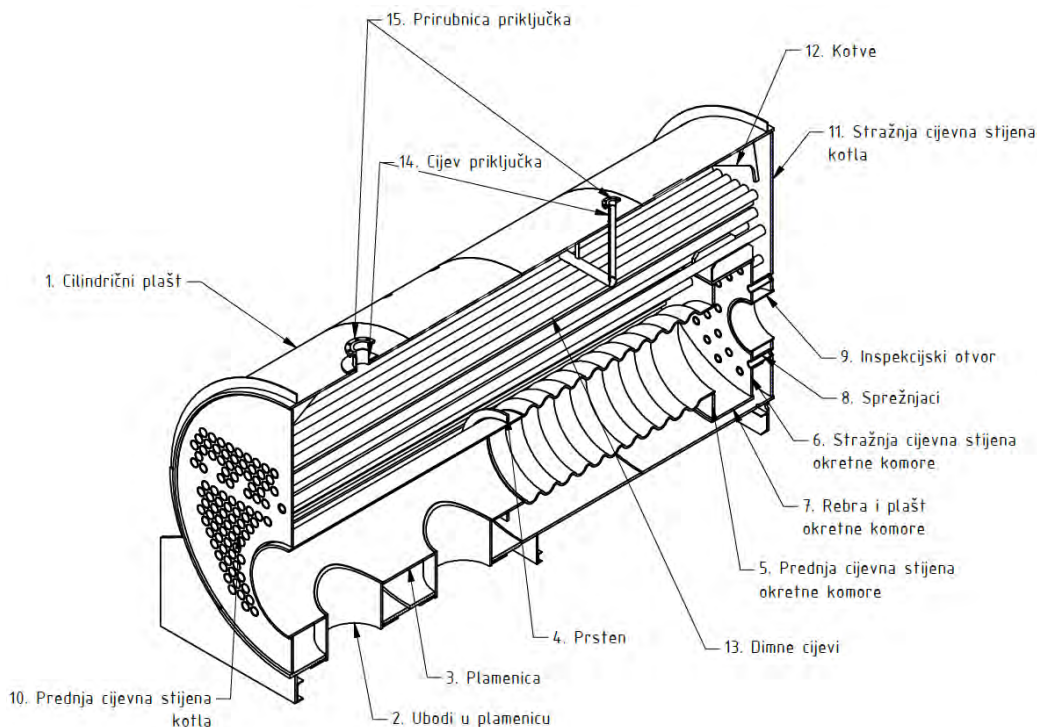
Tablica 1. Konstrukcijski podaci

Projektni pretlak, PS	22 bar(g)
Projektna temperatura, $t_s$	220°C
Radni medij	voda/vodena para
Volumen	25132 l
Transportna masa	31734 kg
Grupa fluida	2
Kategorija prema PED 2014/68/EU [4]	IV
Faktor zavara (Joint Coefficient) [2]	$z = 0,85$
Unutarnji promjer cilindričnog plašta	2850 mm
Duljina cilindričnog plašta	6000 mm

Slika 1 prikazuje pojednostavljenu izometriju zadanog kotla sa svim pozicijama ključnim za proračun čvrstoće. Zadani parni kotao je ložena tlačna posuda horizontalne izvedbe zavarena na 3 oslonca. Sklop kotla i triju oslonaca je u radu postavljen na nosivu konstrukciju ložišta te mjestimično zavaren za čelične profile konstrukcije na način da je kotao fiksiran na stražnjem kraju dok je na prednjem kraju omogućeno gibanje uslijed zagrijavanja čelika u radu.

Korišteni materijali su nelegirani čelici za tlačnu namjenu i povišene temperature. Kvaliteta limova za cijevne stijene je P265GH a za ostale pozicije P355GH. Navedeni materijali u skladu su s HRN EN 10028-2:2017 [5]. Kvaliteta dimnih cijevi i cijevi priključaka je P235GH u skladu s HRN EN 10216-2:2020 [6].





Slika 1. Izometrijski prikaz dimnocijevnog parnog kotla sa istaknutim pozicijama ključnim za analizu naprezanja

## 2 Rasprava

3D model zadanog dimnocijevnog parnog kotla izrađen je u programskom paketu Autodesk Inventor. Kako bi model bio prikladan za provođenje analize u razumnom vremenu i u skladu s mogućnostima računala, provedena su pojednostavljenja i uvedene određene pretpostavke.

To obuhvaća isključivanje iz analize onih pozicija koje nemaju istaknut pozitivan ili negativan utjecaj na čvrstoću kotla te nastojanje da se geometrija pripremi na način koji omogućava korištenje minimalnog broja konačnih elemenata. Zbog simetričnosti kotla, analizirana je samo polovica modela. Pojednostavljen je i spoj cijevi i cijevnih stijena na način da je zavar modeliran po čitavoj debljini cijevne stijene. U stvarnosti, cijevi su za cijevne stijene zavarene na samo prvih nekoliko milimetara, u ovisnosti o debljini cijevi i u skladu sa zahtjevima norme HRN EN 12953-3:2016 [3]. Iz analize su isključeni svi priključci na kotlu osim priključka za ulaz napojne vode i priključka za izlaz suhozasićene pare. U slučaju izrade sveobuhvatnog proračuna čvrstoće, čiji bi cilj bio ishoditi odobrenje konstrukcije od strane prijavljenog tijela za ocjenu sukladnosti, to ne bi bilo korektno. Budući da je cilj ovog rada prikazati metodologiju proračuna, navedeno pojednostavljenje je prihvatljivo.

Geometrija definirana u prethodnom poglavlju diskretizirana je mrežom jednodimenzijskih i trodimenzijskih konačnih elemenata [7]. U cilju skraćivanja vremena

proračuna na minimum, kotao je modeliran kao jedna cjelina (*Part*), umjesto kao sklop više pozicija (*Assembly*). Na taj način eliminira se potreba za definiranjem kontakata između različitih pozicija i softver čitavi kotao promatra kao fiksnu zavarenu cjelinu. Sve pozicije u kotlu ključne za proračun čvrstoće koje prikazuje slika 1, osim dimnih cijevi, diskretizirane su tetradrima drugog reda (*Parabolic solid element - tetrahedron*). Budući da bi za zadane dimenzije, i korištenjem izabranih elementata, bilo potrebno 70 000 – 90 000 elemenata za diskretizaciju samo jedne dimne cijevi, dimne cijevi su diskretizirane grednim elementima prvog reda (*Linear line element – beam*). Umjesto modeliranja cijele dimne cijevi koja se proteže duž čitavog kotla u iznosu od 6000 mm, modelirani su tek dijelovi cijevi u spoju s cijevnim stijenama čije su duljine tek 4 puta veće od debljine cijevnih stijena tj. iznose 104 mm. Samo taj mali dio cijevi diskretiziran je mrežom trodimenzijskih konačnih elemenata [8,9]. Ostatak cijevi diskretiziran je mrežom grednih elemenata i vezan s čvorovima tetraedara pomoću idealno krutih veza (*Rigid body connector – RBE2*) [10].

Konstante materijala izračunate su prema aneksu O norme HRN EN 13445-3:2021 [2]. Zbog pojednostavljenja modela na jednu cjelinu (*Part*), svojstva materijala nije moguće unijeti u softver kao ulazni podatak za svaku poziciju zasebno. Tablica 2 prikazuje konstantne vrijednosti svojstava materijala izračunate kao aritmetičke sredine ranije izračunatih vrijednosti te korištene kao ulazni podatak za simulaciju.

Tablica 2. Svojstva materijala

Naziv	Oznaka	Iznos	Mjerna jedinica
Youngov modul elastičnosti	$E$	195000	MPa
Poissonov faktor	$\nu$	0,3	–
Koeficijent toplinske rastezljivosti	$\beta$	$1,42 \cdot 10^{-5}$	1/K
Specifični toplinski kapacitet	$c_p$	500	J/kgK
Toplinska vodljivost	$\lambda$	48	W/mK

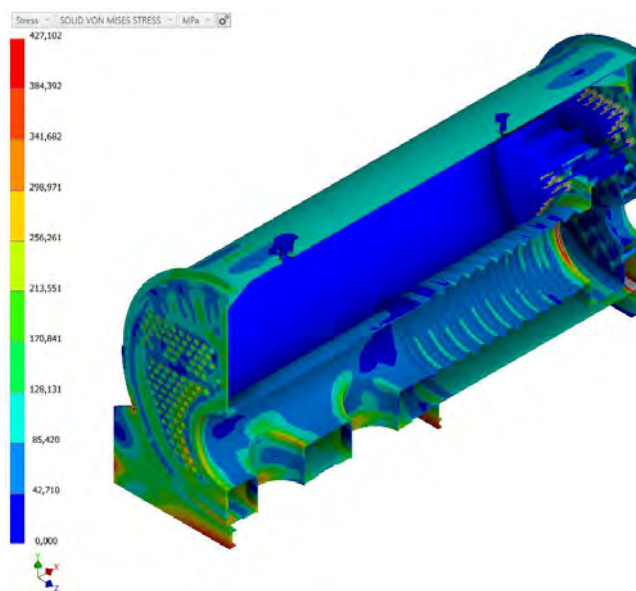
Osim rubnog uvjeta veze s okolinom, postavljeni su rubni uvjeti opterećenja unutarnjim tlakom na površine u kontaktu s radnim medijem, rubni uvjet težine koji uzima u obzir masu mokre pare i čelika te rubni uvjet temperaturnog opterećenja. Za definiranje rubnog uvjeta temperaturnog opterećenja, u kontekstu analize naprezanja u kotlu, provedena je prethodno linearna analiza prijenosa topline (*Linear Steady-State Heat Transfer Analysis*). Namjena ove dodatne analize je dobivanje temperaturne raspodjele u kotlu i svođenje temperaturnog opterećenja na jedan rubni uvjet u statičkoj analizi. Plohe na kojima su definirani rubni uvjeti temperatura promatraju se kao izvori topline od kojih se toplina provođenjem prenosi kroz materijal na susjedne pozicije na kojima rubni uvjet temperature nije definiran [11]. Jedino ovakvim načinom definiranja moguće je ostvariti poveznicu s normom HRN EN 12953-3:2016 [3] budući da postavljeni temperaturni rubni uvjeti odgovaraju proračunskim temperaturama prema istoimenoj normi. Jasno je da u stvarnosti kroz stijenku materijala i na dodirnim ploham susjednih pozicija s definiranim rubnim uvjetima postoji blaži temperaturni gradijent nego što je na ovaj način izračunato.

### 3 Rezultati

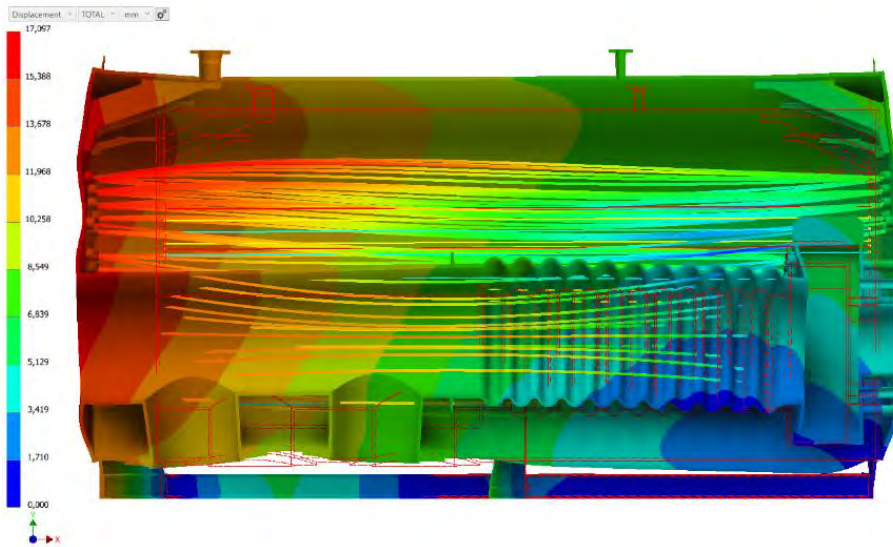
Slika 2 i slika 3 prikazuju raspodjele izračunatih ekvivalentnih Von Mises naprezanja [12] i ukupnih pomaka u zadanom slučaju radnog opterećenja, koje uključuje sva 3 ranije spomenuta rubna uvjeta opterećenja.

Najveća ekvivalentna Von Mises naprezanja pojavljuju se na spojevima cilindričnog plašta i prednje i stražnje cijevne stijene. Povećana naprezanja pojavljuju se i na neojačanim dijelovima cijevnih stijena, na prostorima dovoljno daleko od dimnih cijevi, kotvi, plamenice i sprežnjaka. Von Mises naprezanja na spoju uboda u plamenicu i cilindričnog plašta povećane debljine, na spoju plašteva i cijevnih stijena, spoju valovite plamenice i prednje cijevne stijene okretne komore, spojevima cijevnih stijena okretne komore s plaštem okretne komore veća su od maksimalno postavljenih 300 MPa koje prikazuje Slika 2. Samim time, veća su i od granica tečenja materijala na tim lokacijama. Budući da su ovo rezultati linearno-elastične statičke analize, to ne znači da će se materijal na svim ovim lokacijama nužno plastično deformirati. Prema aneksu C norme HRN EN 13445-3:2021 [2], temperaturno opterećenje svrstava se u različitu kategoriju opasnosti za materijal u odnosu na opterećenje uslijed tlaka i gravitacije.

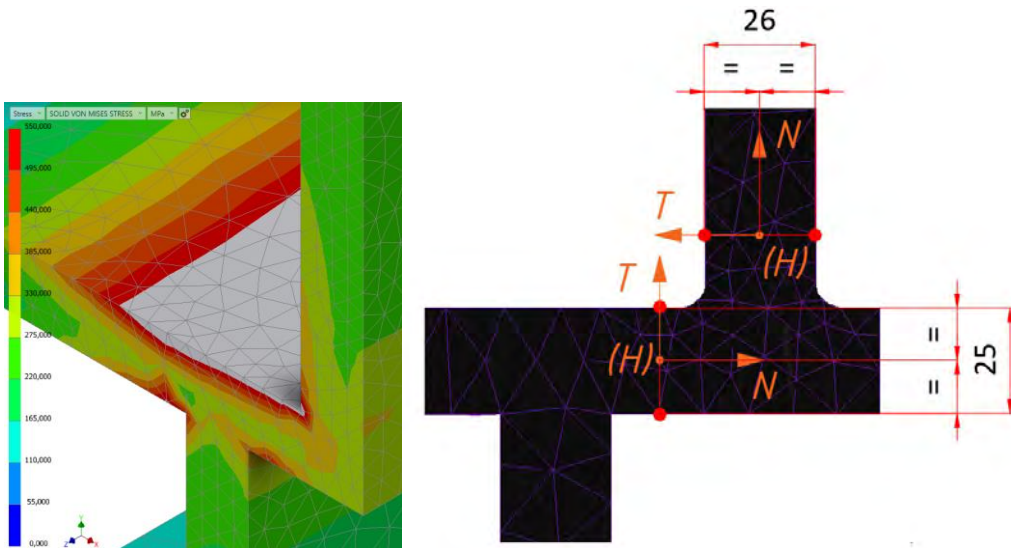
Evaluaciji izračunatih naprezanja pristupljeno je za početak proračunom dopuštenih naprezanja. Budući da se prema standardu s dopuštenim naprezanjima uspoređuju ekvivalentna naprezanja suma odgovarajuće kategoriziranih membranskih i savojnih naprezanja, većina lokacija u kotlu evaluirana je pozitivno samo na temelju usporedbe izračunatih ekvivalentnih naprezanja koje prikazuje Slika 2. Preostaje provesti linearizaciju naprezanja na kritičnoj lokaciji kotlu, što je u ovom slučaju spoj cilindričnog plašta i stražnje cijevne stijene koji prikazuje slika 4.



Slika 2. Raspodjela ekvivalentnih Von Mises naprezanja u slučaju radnog opterećenja



Slika 3. Raspodjela ukupnih pomaka u slučaju radnog opterećenja



Slika 4. Profil ekvivalentnih Von Mises naprezanja na spoju plašta i stražnje cijevne stijene kotla u slučaju radnog opterećenja

Slika 4 prikazuje smještanje linija klasifikacije naprezanja kroz debljinu stijenke cilindričnog plašta i stražnje cijevne stijene. Inventor Nastran ne prepoznaje razliku između primarnih i sekundarnih naprezanja koje definira HRN EN 13445-3:2021 [2], što bi značilo da izračunata ekvivalentna naprezanja ne bi bilo moguće na točan način usporediti s dopuštenima. Uz navedeno, budući da softver daje mogućnost izvlačenja samo ekvivalentnog Von Mises naprezanja tenzora membranskih naprezanja  $P_m$  i ekvivalentnog Von Mises naprezanja tenzora

izračunatog sumiranjem tenzora membranskih i savojnih naprezanja u kritičnom čvoru  $P_{m+b}$ , bilo je potrebno izraditi dvije kopije modela. U jednom modelu modelirana su samo opterećenja koja uzrokuju primarna naprezanja za navedeni spoj (tlak+težina) a u drugom sva 3 rubna uvjeta opterećenja (tlak+težina+temperatura). Pozitivnu evaluaciju kritičnog spoja prikazuju tablica 3 i tablica 4.

Tablica 3. Rezultati linearizacije naprezanja za spoj plašta i stražnje cijevne stijene kroz cijevnu stijenu

Oznaka	Izračunata vrijednost	Dopuštena vrijednost	Rezerva
$P_m$	33 MPa	121 MPa	72,73%
$P_{m+b}$	359 MPa	363 MPa	1,1%

Tablica 4. Rezultati linearizacije naprezanja za spoj plašta i stražnje cijevne stijene kroz plaštu

Oznaka	Izračunata vrijednost	Dopuštena vrijednost	Rezerva
$P_m$	18 MPa	172 MPa	90%
$P_{m+b}$	513 MPa	516 MPa	0,6%

## 4 Zaključak

Konstrukcija kotla napravljena metodom *DBF* prema HRN EN 12953-3:2016 [3] potvrđena je metodom temeljenom na kategorizaciji naprezanja prema aneksu C norme HRN EN 13445-3:2021 [2].

Dobivena je potvrda konstrukcije s većom rezervom metodom *DBA* u odnosu na *DBF* s iznimkom spoja plašta i cijevne stijene u radnom opterećenju. Potencijalni razlozi za to su strogo definirane rubnih uvjeta veze s okolinom i mala kontaktna površina između nosivih prstenova i cilindričnog plašta. Točniji rezultati, u smislu manjih i realnije izračunatih elementarnih naprezanja, mogli bi se dobiti podmodeliranjem navedenog spoja te lokalnim poboljšavanjem mreže konačnih elemenata pomoću metoda *H-refinement* i *P-refinement* dostupnih u Inventor Nastran-u [13]. Značajno veća naprezanja izračunata na spoju plamenice i prednje cijevne stijene okretno komore, u slučaju uključivanja rubnog uvjeta temperaturnog opterećenja uz već postojeće rubne uvjete unutarnjeg tlaka i težine, naglašavaju važnost i utjecaj toplinskih naprezanja koja metoda *DBF* ne uzima direktno u obzir [14].

Prikazana je procedura provođenja proračuna metodom temeljenom na kategorizaciji naprezanja u Inventor Nastran-u. Aneks C norme HRN EN 13445-3:2021 ne referira se na postojeće softvere za numeričku analizu niti spominje metodu konačnih elemenata kao takvu. Kao glavne mane Inventor Nastran-a ističu se uzak izbor različitih konačnih elemenata i oskudnost izlaznih podataka u opciji linearizacije naprezanja. S druge strane, prednost je značajno niža cijena u odnosu na većinu konkurentnih programskih paketa uz postojanje mogućnosti za prevladavanje nedostataka na račun produljenja vremena analize.

---

**Literatura**

- [1] HRN EN 12953-5:2020, Dimnocijevni kotlovi - 5. dio: Pregled tijekom izrade; dokumentacija i označivanje dijelova kotla pod tlakom (EN 12953-5:2020).
- [2] HRN EN 13445-3:2021, Neložene posude pod tlakom - 3. dio: Projektiranje (EN 13445-3:2021, 1. izdanje 2021-05).
- [3] HRN EN 12953-3:2016, Dimnocijevni kotlovi - 3. dio: Projektiranje i proračun dijelova pod tlakom (EN 12953-3:2016).
- [4] Pressure Equipment Directive PED 2014/68/EU.
- [5] HRN EN 10028-2:2017, Plosnati proizvodi od čelika za tlačne namjene - 2. dio: Nelegirani i legirani čelici s utvrđenim svojstvima pri povišenim temperaturama (EN 10028-2:2017).
- [6] HRN EN 10216-2:2020, Bešavne čelične cijevi za tlačne namjene - Tehnički uvjeti isporuke - 2. dio: Cijevi od nelegiranih i legiranih čelika s utvrđenim svojstvima pri povišenim temperaturama.
- [7] Sorić J.; Metoda konačnih elemenata; Golden marketing-Tehnička knjiga; Zagreb; 2021.
- [8] Qian C. F., Yu H. J. i Yao L.; Finite Element Analysis and Experimental Investigation of Tubesheet Structure; Journal of Pressure Vessel Technology; 2009; 131(1); 011206.
- [9] Jin W., Gao Z., Liang L., Zheng J. i Zhang K.; Comparison of two FEA models for calculating stresses in shell-and-tube heat exchanger; International Journal of Pressure Vessels and Piping; 2004; 81(6); 563-567.
- [10] Autodesk Inventor Nastran; <https://help.autodesk.com/view/NINCAD/2022/ENU/>.
- [11] Galović A.; Termodinamika II; Fakultet strojarstva i brodogradnje; Zagreb; 2010.
- [12] Alfirević I.; Nauka o čvrstoći I; ITP „Tehnička knjiga“ d.d.; Zagreb; 1995.
- [13] Younis W.; Up and Running with Autodesk Inventor Nastran 2023 - Simulation for Designers; neovisni izdavač; 18.04.2022.
- [14] Živković D., Milčić D., Banić M. i Milosavljević P.; Thermomechanical Finite Element Analysis of Hot Water Boiler Structure; Thermal Science; 2012; 16 (2); S387-S398.

# Numerička analiza dinamike grede

Tutić, K.<sup>1</sup> i Mudrić, T.<sup>2</sup>

## Sažetak

Ovaj rad se bavi numeričkom analizom dinamike grede primjenom metode konačnih elemenata. Greda se promatra kao segment koji je diskretiziran u manje segmente, gdje svaki segment predstavlja konačni element. Svaki konačni element ima dvije točke i svaka točka ima tri stupnja slobode, od kojih dva opisuju pomak, a jedan opisuje rotaciju, što omogućuje potpuno opisivanje polja pomaka grede. Ponašanje svakog elementa grede ovisi o funkcijama oblika koje se koriste za izračun matrica krutosti i mase. U ovom slučaju koriste se interpolacijske funkcije polinoma trećeg stupnja. Prezentira se analiza neprigušenih slobodnih vibracija. Kako bi se opisao pomak grede u vremenu koristi se numerička integracija. Integracija se provodi metodom konačnih razlika i Runge-Kutta metodom. Numerička analiza provodi se za slobodno oslonjenu gredu i konzolu. U okviru ovog istraživanja provodimo procjenu točnosti dobivenih numeričkih rješenja. Dobivena rješenja uspoređujemo s postojećim analitičkim rješenjem za slobodne neprigušene oscilacije. Taj postupak ima važnu ulogu u validaciji i ocjeni točnosti i pouzdanosti numeričkih metoda koje koristimo za analizu dinamičkog ponašanja grede.

**Ključne riječi:** greda, numerička analiza, dinamika, metoda konačnih elemenata, numerička integracija, konvergencija

---

<sup>1</sup> **Katarina Tutić, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: katarina.tutic@uniri.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Teo Mudrić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: teo.mudric2@gradri.uniri.hr

## 1 Uvod

Dinamika grede predstavlja ključan aspekt u istraživanju i analizi konstrukcija. Analiza dinamike greda obuhvaća proučavanje njihovih slobodnih vibracija, kao i odziv na vanjsku pobudu, što ima ključnu ulogu u predviđanju i sprječavanju mogućih problema u konstrukcijama. Promatranjem vibracijskih oblika greda, možemo bolje sagledati ponašanje konstrukcija pod različitim uvjetima opterećenja, te razumjeti kako različite frekvencije oscilacija utječu na njihov dinamički odgovor kroz vrijeme. Kroz ovaj rad, želimo potvrditi i procijeniti točnost i pouzdanost numeričkih metoda koje koristimo za analizu dinamičkog ponašanja grede.

## 2 Slobodne neprigušene vibracije grede

Analiziramo vibracije greda bez vanjskog opterećenja i prigušenja. Jednadžba kretanja grede bez djelovanja vanjskog opterećenja dana je sljedećom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom [1]:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Savojna krutost grede označena je s  $EI$ ,  $\rho$  označava gustoću materijala grede dok  $A$  predstavlja površinu poprečnog presjeka grede. Vertikalni otklon grede  $u(x, t)$  (gdje  $x$  označava položaj, a  $t$  vrijeme) može se zapisati kao umnožak interpolacijske funkcije oblika  $\Phi(x)$  i funkcije u vremenu  $Y(t)$ :

$$u(x, t) = \Phi(x) Y(t) \quad (2)$$

Izvod općeg rješenja ove jednadžbe detaljno je objašnjen u [1]. Funkcija  $Y(t)$  ovisi o početnom položaju i početnoj brzini, a dana je sljedećim izrazom [1]:

$$Y(t) = Y(0) \cos \omega t + \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (3)$$

Funkcija  $Y$ , osim što ovisi o vremenu  $t$ , također ovisi o početnom položaju grede  $Y(0)$ , početnoj brzini  $\dot{Y}(0)$  i prirodnoj frekvenciji grede  $\omega$ . Opću funkciju oblika grede možemo izraziti na sljedeći način:

$$\Phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax \quad (4)$$

Konstante  $A_i$  dobivaju se iz rubnih uvjeta, dok je  $a$  konstanta koja se može izraziti kao:

$$\frac{\Phi^{iv}(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\bar{m} \dot{Y}(t)}{EI Y(t)} = a^4 \quad (5)$$

Funkcija oblika za slobodno oslonjenu gredu prikazana je jednadžbom (6), dok jednadžba (7) prikazuje funkciju oblika za konzolnu gredu:



$$\Phi(x) = A_2 \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (6)$$

$$\Phi(x) = A_1 \left[ \cos ax - \cosh ax - \frac{(\cos aL + \cosh aL)}{(\sin aL + \sinh aL)} (\sin ax + \sinh ax) \right] \quad (7)$$

### 3 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata primijenjena na analizu grede uključuje diskretizaciju nosača na manje elemente. Svaki od tih elemenata sastoji se od dva čvora i karakteriziran je specifičnim svojstvima kao što su duljina, poprečni presjek i materijalna svojstva. Svaki čvor pojedinog konačnog elementa ima tri stupnja slobode koji predstavljaju translacijski pomak duž x i y osi, te kut zaokreta. Pomoću funkcija oblika moguće je dobiti matrice krutosti i masa za svaki segment grede prema [2]. Nakon što se odrede matrice krutosti i mase za pojedine elemente moguće je sastaviti globalne matrice krutosti i mase za čitavu gredu. Time dolazimo do sustava algebarskih jednadžbi koji predstavljaju aproksimaciju jednadžbe (1):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

Vektor pomaka grede označen je varijablom  $\mathbf{u}$ , dok se vektor akceleracije grede označava varijablom  $\ddot{\mathbf{u}}$ , pri čemu su  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  globalne matrice masa i krutosti. Svaki stupanj slobode u vektoru ubrzanja i vektoru pomaka je funkcija vremena. Vremenska integracija jednadžbe (8) provesti će se numeričkim metodama.

### 4 Metode numeričke integracije

Kako bismo dobili pomake grede u vremenu, neophodno je primijeniti numeričku integraciju. Numeričke integracije podrazumijevaju diskretizaciju vremenskog intervala na male korake, gdje se vremenski tijek reprezentira nizom diskretnih vrijednosti. Za svaki diskretni vremenski korak, izračunava se rješenje temeljem aproksimacija pomaka, brzine i akceleracije. U ovom radu koristit će se i usporediti metoda konačnih razlika i Runge Kutta metoda [3]. Obje korištene metode su eksplicitne, što znači da se koristi trenutni pomak kako bi se izračunao sljedeći pomak u vremenskom koraku. Da bismo izrazili idući pomak pomoću trenutnog metodom konačnih razlika, koristi se jednadžba akceleracije:

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (9)$$

Kako bismo dobili položaj na kraju vremenskog koraka  $\Delta t$ , potrebno je kombinirati jednadžbu akceleracije s dinamičkom jednadžbom (8), što nam daje:

$$\mathbf{u}_{n+1} = 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} - \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}_n \quad (10)$$

Runge Kutta metoda četvrtog reda koristi niz funkcija kako bi se dobio sljedeći korak:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6} \times (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (11)$$

Pomoćne veličine  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  dane su sljedećim jednadžbama:

$$k_1 = \dot{\mathbf{u}}_n \quad (12)$$

$$k_2 = \dot{\mathbf{u}}_n - 0.5 \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}_n \quad (13)$$

$$k_3 = \dot{\mathbf{u}}_n - 0.5 \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{u}_n + 0.5 \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n) \quad (14)$$

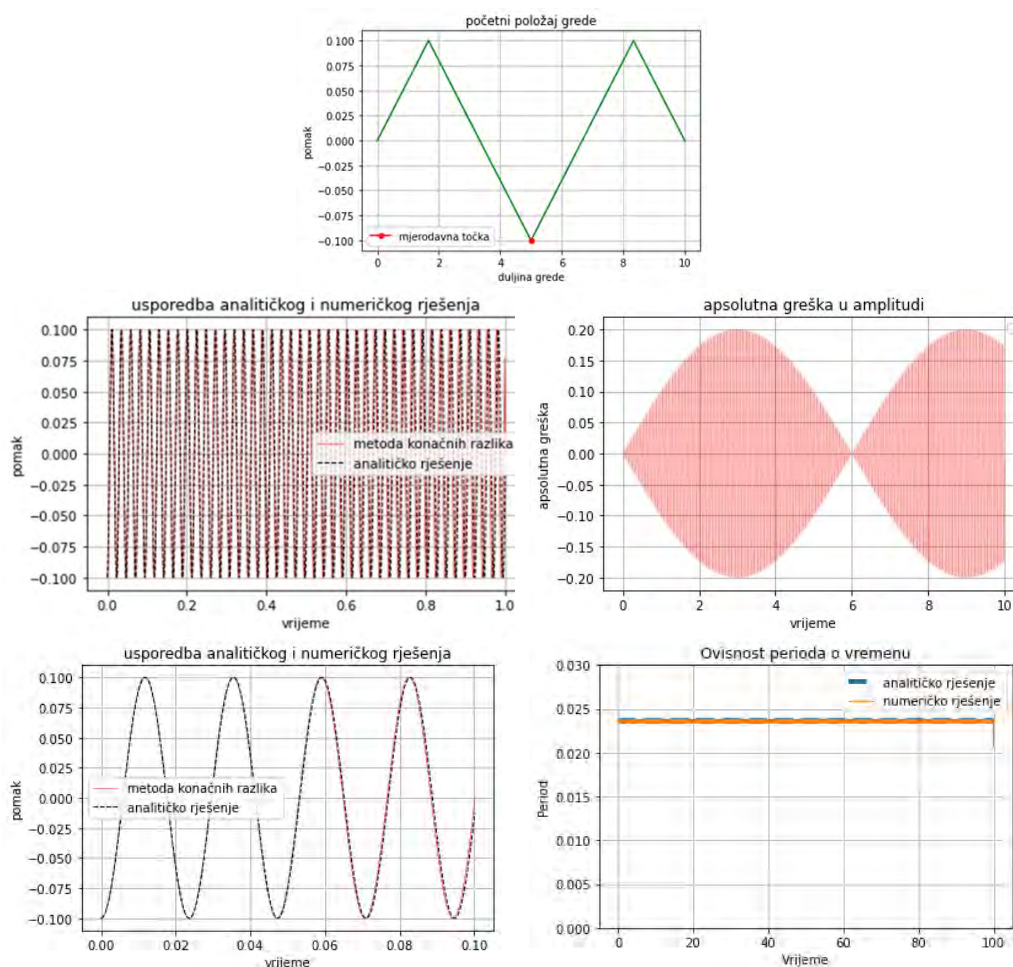
$$k_4 = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{u}_n + 0.5 \Delta t (\dot{\mathbf{u}}_n - 0.5 \Delta t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}_n))) \quad (15)$$

## 5 Numerički primjeri

U ovom poglavlju prikazani su rezultati analize slobodno oslonjene grede i konzole za slobodne neprigušene vibracije. Za slobodno oslonjenu gredu analizira se prvih pet tonova, dok se za konzolu obrađuju prva četiri tona. U ovom radu prikazuje se samo treći ton kod slobodno oslonjene grede i drugi ton kod konzole, dok će detaljne analize za preostale tonove biti predstavljene kasnije. Dodatno, uključena je i analiza vibracija koje proizlaze iz vanjske pobude, koja će također biti prezentirana u daljnjem izvještaju.

### 5.1 Slobodno oslonjena greda

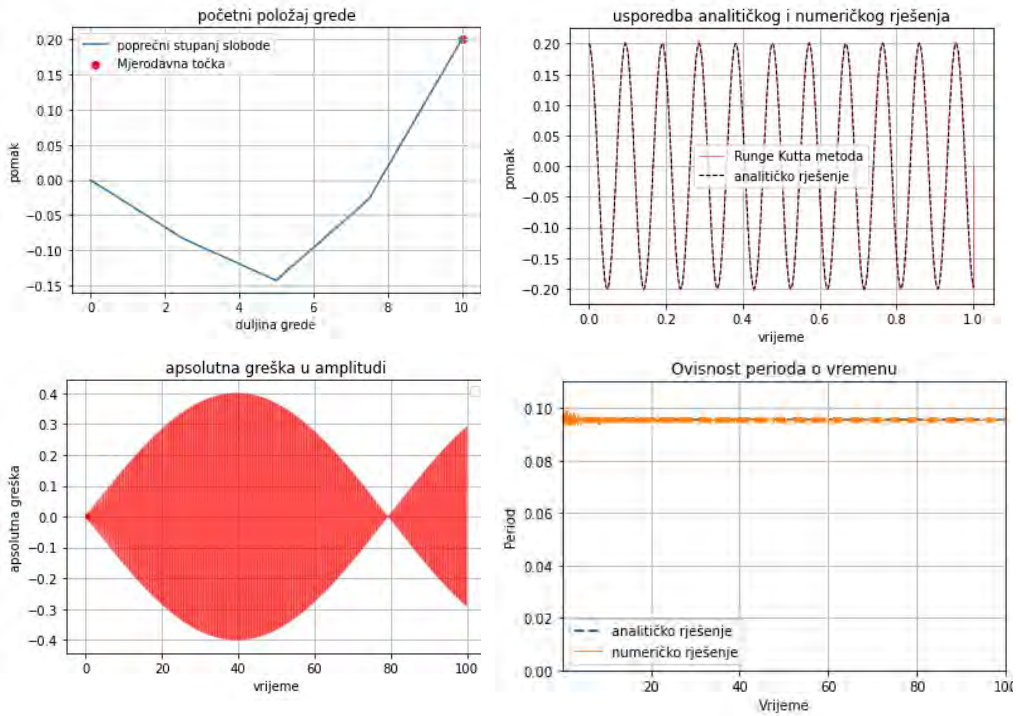
Početni položaj slobodno oslonjene grede odgovara trećem tonu, te promatramo slučaj kada se slobodno oslonjena greda sastoji od 6 konačnih elemenata. Kako bismo postigli konvergenciju rezultata potrebno je koristiti vremenski korak od 0.0003 s za metodu konačnih razlika i vremenski korak 0.0004 s za Runge Kutta metodu. Na Slici 1 prikazana je usporedba metode konačnih razlika s analitičkim rješenjem u vremenu, zajedno s prikazom odstupanja u amplitudi i periodu. Iz analiziranih grafova jasno se opažaju odstupanja numeričkog rješenja od analitičkog. Kako periodi analitičkog i numeričkog rješenja nisu isti očekivano je da će pogreška s vremenom rasti, ali i da će se u određenom trenutku ta pogreška početi smanjivati. Naime, kada numeričko rješenje dostigne maksimalni pomak na mjestu gdje je minimalni pomak u analitičkom rješenju, greška će biti najveća. No, kako se numeričko rješenje opet približava analitičkom, pogreška će se postupno smanjivati dok ne dosegne vrijednost nula.



Slika 1. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja slobodno oslonjene grede za treći ton

## 5.2 Konzolna greda

Numerička analiza konzolne grede provedena je analogno kao kod slobodno oslonjene grede, no s različitim rubnim uvjetima. Za ovaj konkretan primjer konzola se sastoji od četiri konačna elementa gdje se koristi vremenski korak od 0.0007 s za metodu konačnih razlika, dok se za Runge-Kutta metodu koristi vremenski korak od 0.0009 s. Na Slici 2. prikazana je usporedba između Runge Kutta metode i analitičkog rješenja u vremenu. Također su uočene razlike u periodu i amplitudi, te se primjećuje da apsolutna greška u amplitudi ima identičan oblik kao u prethodnom slučaju, s napomenom da se maksimalna greška pojavljuje u različitom vremenskom trenutku. Detaljnom analizom primjećujemo da i dalje prisustvuje određena razina pogreške, pri čemu ta pogreška ovisi o broju konačnih elemenata i vremenskom koraku. Povećanje broja konačnih elemenata zahtijeva smanjenje vremenskog koraka što vodi ka postizanju preciznijih rezultata te se maksimalna apsolutna vrijednost greške u amplitudi manifestira sve kasnije u vremenskom intervalu.



Slika 2. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja konzole za drugi ton

## 6 Zaključak

Usporedbom numeričkih metoda s analitičkim rješenjem primjećujemo da se nakon određenog vremena počinju pojavljivati odstupanja. Odstupanja su manja kada je vremenski korak manji, što rezultira preciznijim rezultatima. Također, primjećujemo da je Runge-Kutta metoda pokazala veću točnost u oba slučaja, budući da je sposobna postići konvergenciju s većim vremenskim korakom u usporedbi s metodom konačnih razlika.

### Zahvala

Potpora ovom istraživanju pružena je znanstvenim projektom „Analiza i kalibracija parametara kod numeričkog modeliranja ljuljanja krutog bloka na elastičnoj gredi pristupom ne-glatke kontaktne dinamike“ (uniri-mladi-tehnic-22-72) kojeg financira Sveučilište u Rijeci.

### Literatura

- [1] Clough, R. W. i Penzien, J.; (1993); Dynamics of Structures (2. izdanje.), McGraw-Hill
- [2] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. i Witt, R. J.; (2001); Concepts and Applications of Finite Element Analysis (4. izdanje), John Wiley & Sons.
- [3] Kreyszig, E., Kreyszig, H., i Norminton, E. J.; (2011). Advanced Engineering Mathematics (10. izdanje), John Wiley & Sons.

## Numeričko modeliranje iniciranja i rasta oštećenja u zavarenom spoju

Vukovojac, M.<sup>1</sup>, Jalušić, B.<sup>2</sup>, Lesičar, T.<sup>3</sup>, Skozrit, I.<sup>4</sup> i Tonković, Z.<sup>5</sup>

### Sažetak

Zavarivanje je najčešći postupak spajanja konstrukcijskih elemenata u različitim granama industrije. U novije vrijeme, fokus istraživača u području tehnologija zavarivanja je usmjeren na povećanje učinkovitosti zavarivačkih postupaka te postizanje maksimalnih vrijednosti mehaničkih svojstava materijala nakon zavarivanja i naknadne mehaničke obrade. U ovom radu opisan je numerički model za predviđanje raspodjele zaostalih naprezanja u zavarenom spoju te numerički model za predviđanje iniciranja i rasta pukotine koji se temelji na metodi faznog polja. Korištena formulacija metode faznih polja izvedena je za rješavanje problema duktilnog loma. Također, ispitan je utjecaj zaostalih naprezanja i plastičnih deformacija na iniciranje i rast pukotine na 2D modelu CT epruvete u smislu zadanih početnih naprezanja i plastičnih deformacija učitanih u model pomoću/putem procedura i rutina sadržanih u programskom paketu Abaqus.

**Ključne riječi:** zavarivanje, numerička mehanika, plastične deformacije, metoda faznog polja

---

<sup>1</sup> **Marin Vukovojac, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: marin.vukovojac@fsb.hr

<sup>2</sup> **dr. sc. Boris Jalušić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr

<sup>3</sup> **doc. dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomlslav.lesicar@fsb.hr

<sup>4</sup> **izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr

<sup>5</sup> **prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

## 1 Uvod

Zavarivanje je jedan od najrasprostranjenijih proizvodnih postupaka spajanja dva ili više konstrukcijskih elemenata upravo zbog svoje jednostavnosti, nižih troškova izrade te manje ukupne mase spoja u odnosu na neke druge postupke spajanja. Stoga, istraživači diljem svijeta svakim danom nastoje poboljšati postojeće postupke zavarivanja, kao i osmisliti neke nove, s ciljem povećanja stupnja učinkovitosti samog procesa.

Jedan od takvih novih postupaka koji omogućava zavarivanje u jednom prolazu koristi metodu zakopanog luka koju su osmislili Baba i suradnici [1], u kojoj se koriste visoki iznosi jakosti struje te strojno upravljano zavarivanje kako bi se osigurao velik unos topline te veća učinkovitost procesa. Kao posljedica toga, u odnosu na klasični suvremeni zavarivački postupak, potreban broj prolaza je reduciran sa šest na samo jedan prolaz. Perić i suradnici [2] su eksperimentalno, a kasnije i numerički, metodom zakopanog luka uspješno zavarili ploče debljine 20 mm u jednom prolazu te su na zavarenom spoju izmjerili zaostala naprezanja na nekoliko mjesta metodom zabušivanja rupica.

Nadalje, eksperimentalna mjerenja su najpouzdanija i daju najtočnije rezultate, no njihov najveći nedostatak je to što su dugotrajna i skupa. Zato se u novije vrijeme eksperimentalna ispitivanja u većoj mjeri zamjenjuju numeričkim modelima i ispitivanjima koja se baziraju na metodi konačnih elemenata. Jedna od najviše korištenih numeričkih metoda za ispitivanje parametara mehanike loma je i metoda faznog polja (MFP), tj. eng. phase-field method (PFM). Seleš i suradnici [3] su se bavili raspregnutim algoritmom metode faznog polja za krhki lom, pri čemu je naglasak stavljen na kriterij zaustavljanja postupka konvergencije, što je novitet u odnosu na prethodne često korištene algoritme sa jednom iteracijom. Njihov algoritam je implementiran u programski paket Abaqus te koristi tri različita sloja konačnih elemenata definiranih u korisničkoj rutini, pri čemu zadnji sloj upravlja kriterijem zaustavljanja iterativnog postupka. Lesičar i suradnici [4] su razvili inovativni raspregnuti algoritam metode faznog polja za modeliranje problema krhkog i duktilnog loma. Navedeni algoritam je implementiran u programski paket Abaqus koji se bazira na metodi konačnih elemenata, a sastoji se od dva sloja konačnih elemenata te jednog jedinog konačnog elementa posebne namjene, koji je definiran u korisničkoj rutini UEL, a upravlja globalnom konvergencijom spregnutog modela.

## 2 Numerički modeli

Konačan cilj ovog istraživanja je povećati učinkovitost procesa zavarivanja, osigurati optimalne vrijednosti mehaničkih svojstava materijala, minimalna zaostala naprezanja i minimalno deformiranje konstrukcije. Za postizanje navedenih ciljeva bio bi potreban vrlo velik broj uzoraka, resursa za postupak zavarivanja te naknadne mehaničke i toplinske obrade, što bi bilo dugotrajno i skupo. Zato je potrebno razviti vremenski učinkovite numeričke modele koji će moći barem djelomično zamijeniti eksperimentalna mjerenja.

U cilju predviđanja raspodjele zaostalih naprezanja i plastičnih deformacija, na osnovu eksperimentalnih ispitivanja koje su proveli Perić i suradnici [2] napravljen je 3D numerički model zavarivanja [5]. Numerički se model sastoji od sekvencijalno spregnute toplinsko-mehaničke analize, što znači da se temperaturno polje izračunato u toplinskoj analizi, koje je ovisno o vremenu, koristi kao toplinsko opterećenje u mehaničkoj analizi.

U toplinskoj analizi je za unos toplinskog toka korištena metoda zadavanja temperature zavara, eng. prescribed weld temperature (PWT), dok je za simuliranje taljenja dodatnog materijala korištena metoda rađanja i umiranja elemenata, eng. element birth and death method (EBDM). Temperatura zavara aproksimirana je iterativnim postupkom uspoređivanja numerički dobivenog temperaturnog profila sa onim eksperimentalno izmjerenim za karakteristične točke [2].

Mehaničkom analizom izračunava se polje pomaka uslijed toplinskog opterećenja. U svrhu proučavanja modela očvršćivanja na iznos i raspodjelu zaostalih naprezanja korišteni su izotropni i kinematički modeli očvršćivanja. Također, numerički model je pojednostavljen na način da su zanemarene fazne promjene uslijed zavarivanja što je opravdano za niskouglične čelike [6].

## 1.2 Metoda faznog polja (MFP) – plastične deformacije i zaostala naprezanja

Kao što je već spomenuto, zbog velikog unosa topline i naglog hlađenja u zavarenim spojevima se javljaju plastične deformacije i zaostala naprezanja koja će naravno imati utjecaj na mehanička svojstva zavarenog spoja, parametre mehanike loma te nastanak i razvoj oštećenja. Budući da je numeričkim modelom zavarivanja moguće s relativno velikom pozudanošću procijeniti polje plastičnih deformacija i zaostalih naprezanja, pristupilo se izradi modela na temelju metode faznog polja pomoću kojeg bi se proučio utjecaj nusprodukata zavarivanja na parametre mehanike loma. U modelu je primijenjen raspregnuti algoritam metode faznog polja koji koristi dva sloja konačnih elemenata za rješavanje pomaka i faznog polja te jednog elementa posebne namjene za upravljanje globalnom konvergencijom modela [4]. U izradi ovog rada korišten je programski paket Abaqus.

Naravno, zbog lakšeg razumijevanja utjecaja zaostalih naprezanja i plastičnih deformacija na parametre mehanike loma te procjene ispravnosti numerički dobivenih rezultata, pristupilo se izradi 2D modela CT epruvete na temelju podataka iz literature. Liljedahl i suradnici [7] su ispitali utjecaj zaostalih naprezanja i propagaciju pukotine na CT epruveti koja je dobivena sekvencijalnim izrezivanjem različitih geometrija iz dviju ploča, izrađenih od aluminijske legure 2024-T351, po duljini zavarenih autogenim zavarivanjem plazmom s varijabilnim polaritetom, eng. autogenous variable polarity plasma arc (VPPA). U sklopu tog cjelokupnog istraživanja napravljena su eksperimentalna mjerenja zaostalih naprezanja korištenjem metode neutronske difrakcije [8]. Duž profila presjeka u smislu zaostalih naprezanja izmjerena je samo jedna komponenta tenzora naprezanja. Ti mjereni podaci korišteni su kako bi preko nelinearnog izotropnog modela očvršćivanja (1):

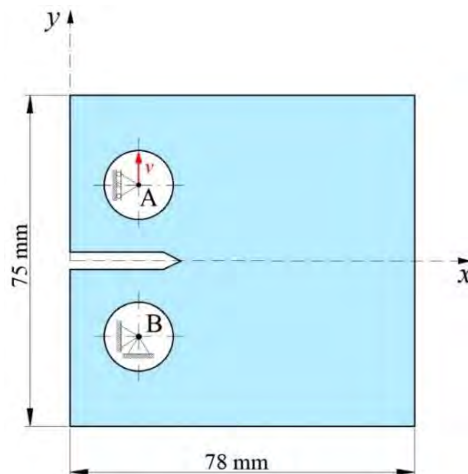
$$\sigma = \sigma_{y0} + Q_{\infty}(1 - e^{-b\varepsilon_p}), \quad (1)$$

aproksimirali jednu normalnu komponentu tenzora plastične deformacije. Ona je kasnije korištena kao početni uvjet u jednom od numeričkih modela. U izrazu (1)  $\sigma$  predstavlja ekvivalentno naprezanje,  $\sigma_{y0}$  početna granicu tečenja,  $Q_{\infty}$  koeficijent očvršćenja,  $b$  eksponent očvršćenja, dok  $\varepsilon_p$  predstavlja ekvivalentnu plastičnu deformaciju. Sve korištene vrijednosti članova izraza (1) navedene su u tablici 1., a aproksimirane su primjenom metode najmanjih kvadrata na set podataka preuzetih iz literature [9] koji su eksperimentalno mjereni tijekom vlačnog pokusa.

Tablica 1. Elastoplastična materijalna svojstva za aluminijsku leguru 2024-T351

$\sigma_{y0}$ [MPa]	$E$ [MPa]	$Q_{\infty}$ [MPa]	$b$ [-]	$\nu$ [-]
372,73	73084	109,95	21,33	0,33

Na temelju dimenzija iz literature [8] napravljen je numerički model prema slici 1., gdje je moguće vidjeti da je pomak u točki B u potpunosti spriječen, dok je u točki A epruveta opterećena pomakom u smjeru osi  $y$  koji osigurava iniciranje i razvoj pukotine.



Slika 1. Dvodimenzionalni model CT epruvete sa zadanim rubnim uvjetima [10]

Napravljena su tri modela sa različitim početnim uvjetima kako bi se ispitao pojedinačni utjecaj zaostalih naprezanja i plastičnih deformacija na nastanak i rast pukotine, tj. dijagram sila-pomak. U prvom modelu, materijal je modeliran kao osnovni materijal, tj. materijal prije zavarivanja. U drugom modelu su u točke integracije konačnih elemenata, preko procedure za početne uvjete u programskom paketu Abaqus, zadana početna naprezanja, tj. iz literature preuzeta zaostala naprezanja izmjerena neutronsom difrakcijom. U treći model su u integracijske točke konačnih elemenata uz početna naprezanja, kao i u prethodnom modelu, učitane i aproksimirane plastične deformacije preko korisničke rutine UMAT programskog paketa Abaqus.

Za potrebe metode faznog polja potrebno je zadati parametre  $G_c$  i  $l$ , pri čemu prvi predstavlja lomnu žilavost materijala, a drugi parametar duljinske skale. Lomna žilavost materijala je aproksimirana iz jednadžbe za krhki lom i za aluminijsku leguru 2024-T351 iznosi  $G_c = 19,1$  N/mm, dok je raspon parametra duljinske skale izračunat prema modelu faznog polja AT-2 te je u skladu s tim odabrano  $l = 0,75$  mm.

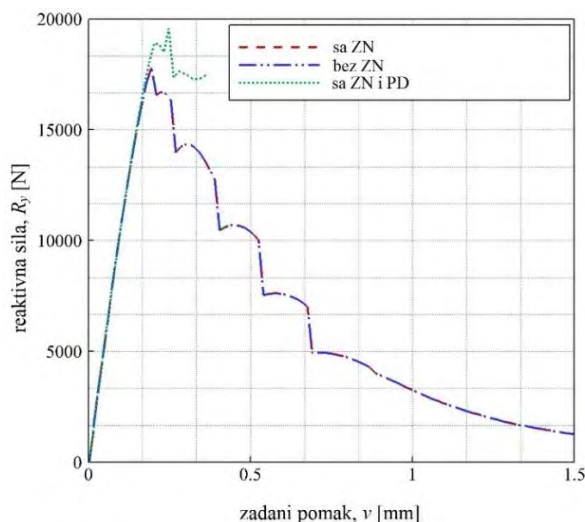
Sva tri modela diskretizirana su sa dvije jednake mreže od 96248 konačnih elemenata, od kojih se jedna odnosi na dio MFP modela kojim se izračunava polje pomaka i sastoji se od elemenata CPE4, dok se druga odnosi na dio MFP modela kojim se izračunava fazno polje i sastoji se od konačnih elemenata definiranih u rutini UEL.



### 3 Rezultati

#### 3.1 Metoda faznog polja (MFP) – plastične deformacije i zaostala naprezanja

Na slici 2. prikazan je dijagram sila-pomak za tri prethodno opisana numerička modela CT epruvete. Prvi model bez zaostalih naprezanja (bez ZN), opisuje kako bi se ponašala CT epruveta izrađena od osnovnog materijala koji nije bio podvrgnut postupku zavarivanja. Također, u ovom najjednostavnijem modelu moguće je vidjeti i način na koji materijal postepeno popušta, tj. da ponašanje materijala odgovara postepenom rastu pukotine i da je fizikalno točno opisano metodom faznog polja.



Slika 2. Krivulje sila-pomak za vlačne testove CT epruveta [10]

Drugi model, sa zadanim zaostalim napreznjima (ZN), pokazuje kako sama zaostala napreznja nemaju utjecaj na propagaciju pukotine, tj. popuštanje se odvija po istoj krivulji kako i kod prvog modela koji ne uključuje zaostala napreznja. Treći model, sa zadanim zaostalim napreznjima i plastičnim deformacijama (PD), pokazuje drugačiju krivulju popuštanja, tj. kako plastične deformacije zatupljaju pukotinu i usporavaju njen rast, što je također fizikalno ispravno.

### 4 Zaključak

U sklopu dosadašnjeg istraživanja uspješno su napravljene numerički modeli zavarivanja te numerički model vlačnog pokusa CT epruvete primjenom metode faznog polja, pri čemu su napravljena tri modela – bez zaostalih napreznja, sa zaostalim napreznjima te kombinacijom zaostalih napreznja i plastičnih deformacija. Prva dva modela pokazuju fizikalno korektno modeliranje iniciranje i rasta pukotine metodom faznog polja, ali i to da sama zaostala napreznja bez pripadnih plastičnih deformacija nemaju nikakv utjecaj na krivulju sila-pomak u odnosu na osnovni materijal.

Tijekom proračuna posljednjeg opisanog numeričkog modela CT epruvete javile su se određene poteškoće. Iz razloga što su zadane plastične deformacije bile aproksimativno izračunate došlo je do poteškoća u Newton-Raphsonovom iterativnom postupku uravnotežavanja modela. Iz tog razloga, numerički model ne bi smio biti ograničen samo na zadavanje jedne komponente početne plastične deformacije pa će se u daljnjem istraživanju ići ka učitavanju cijelih/potpunih numerički izračunatih polja zaostalih naprezanja i plastičnih deformacija dobivenih iz mehaničke analize modela zavarivanja.

## Zahvale

Znanstveno istraživanje sufinancirano je sredstvima Europske unije kroz Europski fond za regionalni razvoj, Operativni program Republike Hrvatske “Konkurentnost i kohezija” za razdoblje 2014.-2020., projekt “Unaprjeđenje tehnologije visokoučinskog zavarivanja”, ImproWE - KK.01.1.1.07.0076.

## Literatura

- [1] Baba H., Era T., Ueyama T. i Tanaka M.; Single pass full penetration joining for heavy plate steel using high current GMA process; *Weld World*; 2017; 61(5); 963–9.
- [2] Perić M., Garašić I., Tonković Z., Vuherer T., Nižetić S. i Dedić-Jandrek H.; Numerical prediction and experimental validation of temperature and residual stress distributions in buried-arc welded thick plates; *Int J Energy Res*; 2019; 43(8); 3590–600.
- [3] Seleš K., Lesičar T., Tonković Z. i Sorić J.; A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture; *Eng Fract Mech*; 2019; 205; 370–86.
- [4] Lesičar T., Polančec T. i Tonković Z.; Convergence Check Phase-Field Scheme for Modelling of Brittle and Ductile Fractures; *Appl Sci*; 2023; 13(13); 7776.
- [5] Vukovojac M., Jalušić B., Perić M., Skozrit I. i Tonković Z.; Numerical simulation of high-efficiency one pass welding process in thick steel plates considering hardening effects; *CMMost 2021: 6th International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering*; 2022; 204–13.
- [6] Deng D.; FEM prediction of welding residual stress and distortion in carbon steel considering phase transformation effects; *Mater Des*; 2009; 30(2); 359–66.
- [7] Liljedahl C.D.M., Brouard J., Zanellato O., Lin J., Tan M. L., Ganguly S., Irving P. E., Fitzpatrick M. E., Zhang X. i Edwards L.; Weld residual stress effects on fatigue crack growth behaviour of aluminium alloy 2024-T351; *Int J Fatigue*; 2009; 31(6); 1081–8.
- [8] Bao R., Zhang X. i Yahaya N.A.; Evaluating stress intensity factors due to weld residual stresses by the weight function and finite element methods; *Eng Fract Mech*; 2010; 77(13); 2550–66.
- [9] Gupta S., Beaudoin A. J. i Chevy J.; Strain rate jump induced negative strain rate sensitivity (NSRS) in aluminum alloy 2024: Experiments and constitutive modeling; *Mater Sci Eng A*; 2017; 683; 143–52.
- [10] Jalušić B., Vukovojac M., Lesičar T., Perić M., Skozrit I. i Tonković Z.; Modelling of crack propagation in welded structure using a separated phase-field approach; *7th International Conference on Smart and Sustainable Technologies (SpliTech)*; 2022; 6.

# Modeliranje nestišljive hiperelastičnosti pomoću neuronskih mreža

Zlatic, M.<sup>1</sup> i Čanadija, M.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu je predstavljena metoda modeliranja nestišljive hiperelastičnosti pomoću neuronskih mreža. Posebnu pozornost se stavlja na izbor aktivacijske funkcije i ograničenja u arhitekturi mreže. Numerički primjeri su rađeni u programu ABAQUS, a rezultati su uspoređeni sa postojećim modelima korištenim za modeliranje nestišljive hiperelastičnosti.

**Ključne riječi:** neuronske mreže, strojno učenje, hiperelastičnost, nestišljivost

---

<sup>1</sup> **Martin Zlatic, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51 000 Rijeka, e-mail: mzlatic@riteh.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Marko Čanadija**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51 000 Rijeka, e-mail: marko.canadija@riteh.hr

## 1 Uvod

Primjena neuronskih mreža u mehanici čvrstoga tijela je unatrag par godina sve prisutnija te prodire u sve pore računarske mehanike. Neki od primjera su ovdje navedeni, a mogu uključiti surogatne modele koji zamjenjuju neku strukturu radi smanjenja računskog opterećenja i omogućuju simulacije u stvarnome vremenu [1], rekreiraju rubne uvjete prilikom višerazinskih simulacija [2], te zamjena klasičnih modela ponašanja materijala sa neuronskom mrežom [3-7].

U ovome radu je predstavljeno modeliranje nestišljive hiperelastičnosti neuronskom mrežom uvažavajući ograničenje da neuronska mreža kao funkcija mora biti konveksna s obzirom na ulazne podatke. Rad je nadahnut idejom djelomično konveksnih neuronskih mreža (engl. *partially input convex neural networks, PICNN* [7]) te je arhitektura neuronske mreže prilagođena da *a priori* zadovoljava konveksnost. Kako bi se zadovoljio taj uvjet implementirana je nova aktivacijska funkcija nadahnuta prethodnim modelima za modeliranje hiperelastičnosti [6].

## 2 Temeljni modeli

Temeljni hiperelastični model za modeliranje seta na kojem je neuronska mreža trenirana je Ogdenov model:

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^3 \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p}), \quad (1)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \mathbf{F}} - J p \mathbf{F}^{-T}. \quad (2)$$

U jednadžbi (1)  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) predstavlja glavne vrijednosti gradijenta deformiranja  $\mathbf{F}$ ,  $\alpha_p$  predstavlja bezdimenzijsku vrijednost,  $\mu_p$  predstavlja module smicanja. U jednadžbi (2) oznaka  $\mathbf{P}$  predstavlja prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja,  $p$  predstavlja hidrostatički tlak, a  $J$  determinantu gradijenta deformiranja odnosno volumnu promjenu (pritom je za nestišljivo ponašanje  $J = 1$ ). Jedna od osnovnih ideja u ovome radu je i da se neuronska mreža trenira na naprezanjima umjesto na energiji deformiranja, a u tu svrhu je korišteno drugo Piola-Kirchhoffovo naprezanje:

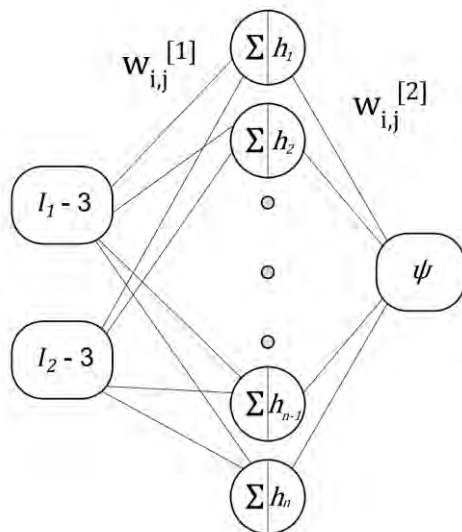
$$\mathbf{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{C} \right] - p \mathbf{C}^{-1}. \quad (3)$$

Dodatno će se koristiti invarijante desnog Cauchy-Greenova tenzora deformacije  $\mathbf{C}$  kao ulaz u neuronsku mrežu, koje su definirane na sljedeći način:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)]. \quad (4)$$

### 3 Neuronska mreža – arhitektura i aktivacijska funkcija

Neuronska mreža koja se koristi je usmjerena neuronska mreža (engl. *Feedforward neural network*) sa jednim skrivenim slojem i 10 neurona u istom, vidi sliku 1.



Slika 1. Generalni prikaz arhitekture usmjerene neuronske mreže.

Kao posebnost se uvodi nova aktivacijska funkcija nadahnuta postojećim klasičnim modelima hiperelastičnosti:

$$h(x) = e^{\alpha x} - 1. \quad (5)$$

Kao ulaz u neuronsku mrežu se koriste varijable  $x_1 = I_1 - 3$  i  $x_2 = I_2 - 3$ , a kao izlaz se koristi energija deformiranja,  $y = \psi(I_1 - 3, I_2 - 3)$ . Ovakvim odabirom aktivacijske funkcije i ulaznih varijabli se osigurava da za nedeformirano stanje vrijedi  $\psi(\mathbf{I}) = 0$ . Prilikom treniranja, koristeći se mogućnosti automatske diferencijacije ugrađene u TensorFlow, neuronska mreža trenira direktno na derivacijama odnosno na naprezanjima pomoću izraza (3). Za treniranje se pritom generiraju samo jednostavna stanja deformacije: jednoosno, jednoliko dvoosno i čisti smik. Također, samo 5 primjera po svakome stanju deformacije se generira, odnosno sveukupno 15 primjera za treniranje. Primjeri za treniranje su u stanju ravninskoga naprezanja.

#### 3.1 Konveksnost neuronske mreže

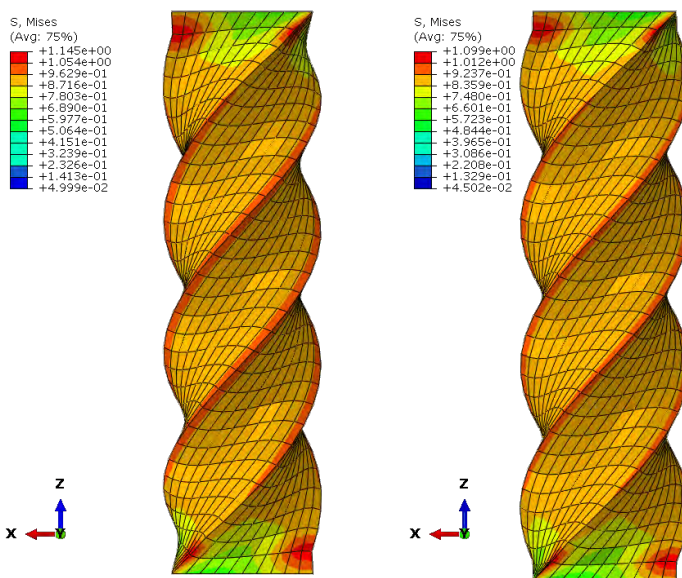
Ukoliko neuronska mreža ima 1 skriveni sloj i koristi aktivacijsku funkciju iz jednadžbe (5), onda se izlaz iz svakog neurona može zapisati na sljedeći način:

$$h_i(I_1 - 3, I_2 - 3) = \exp \left[ \alpha_i \left[ w_{1,i}^{[1]}(I_1 - 3) + w_{2,i}^{[1]}(I_2 - 3) \right] \right] - 1, \quad (6)$$

gdje indeks  $i$  predstavlja redni broj neurona u skrivenome sloju ( $i = 1, \dots, n$ ). Druga derivacija će biti pozitivna te time je osigurana konveksnost cijele neuronske mreže. Jedini ograničavajući uvjet na koji se treba obratiti pozornost je da parametri  $w_{i,j}^{[2]}$  (vidi sliku 1) moraju biti pozitivni, inače pojedine funkcije mogu biti konkavne.

#### 4 Numerički primjer

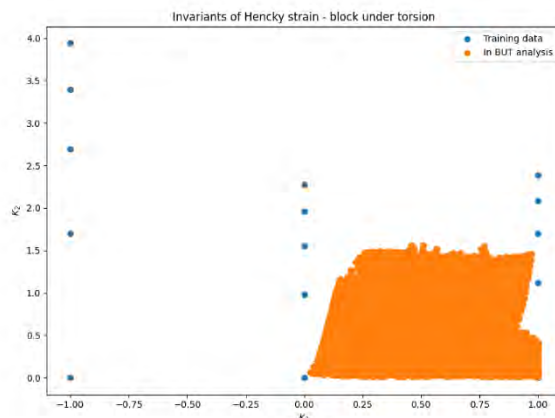
Rezultati su prikazani na 3D primjeru dok je set za treniranje u stanju ravninskog naprezanja. Prilikom proračuna primjera je korišten program ABAQUS te s obzirom da se radi o 3D nestišljivom ponašanju koriste se C3D8H hibridni elementi. Primjer koji je obrađen je kvadar baze 1 m x 1 m i visine 3 m čija se baza pomakne po visini za 1 m, te istovremeno zarotira za 2 puna kruga. Druga baza je uklještena. Rješenja su prikazana na slici 2 gdje se može vidjeti da razlike u maksimalnim naprezanjima iznose otprilike 4%.



Slika 2. Naprezanja [MPa] na kvadru nakon ekstenzije i rotacije, lijevo je rješenje sa neuronskom mrežom, desno sa referentnim modelom.

Dodatno je dan i prikaz invarijanti Henckyjeva tenzora deformiranja na slici 3. Vrijednost na apscisi je invarijanta  $K_3$  koja ukazuje na stanje deformacije, za vrijednost 1 riječ je o stanju čistoga smika, za vrijednost -1 je riječ o jednoosnoj deformaciji, a za 0 o jednolikoj dvoosnoj deformaciji. Na ordinati se nalazi invarijanta  $K_2$  koja daje podatak o intenzitetu deformiranja. Plavim točkama

su prikazane vrijednosti podataka u setu za treniranje, dok su narančastim točkama prikazane vrijednosti u integracijskim točkama bloka prilikom analize.



Slika 3. Prikaz Henckyjevih invarijanti.

## 5 Zaključak

Neuronske mreže su se pokazale kao pogodna zamjena za postojeće klasične modele što je i prikazano u ovome radu. Iako je primjena neuronskih mreža izazvala velik interes i primijenjene su u mnogo različitih polja računarske mehanike, njihov razvoj se dalje nastavlja sa razvojem vlastitih arhitektura ili aktivacijskih funkcija kako bi zadovoljile konstitutivna ograničenja u modeliranju materijala.

U ovome radu se poštujući ograničenje konveksnosti i ne-negativnosti pokazalo da je moguće sa osnovnim oblicima ravninskoga deformiranja uspješno modelirati ponašanje hiperelastičnoga materijala i sukladno tome koristiti dobiveni model na drugome problemu veće kompleksnosti. Također se očituje mogućnost neuronske mreže da ispravno interpolira. Na slici 3 se može vidjeti da su gotovo sva stanja deformacije koja se pojavljuju prilikom analize nalaze između podataka na kojima je mreža trenirana.

Daljnji rad će se baviti proširenjem ovoga pristupa na različita ponašanja poput stišljivosti i modela sa oštećenjima te termomehanička ponašanja, uvažavajući pritom u arhitekturi neuronske mreže i odabiru pojedinih aktivacijskih funkcija znanje iz mehanike čvrstoga tijela.

## Zahvale

Ovaj je rad financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2019-04-4703 i Sveučilište u Rijeci projektom broj uniri-tehnic-18-37.

---

**Literatura**

- [1] Mendizabal, A., et al.; Simulation of hyperelastic materials in real-time using Deep Learning; *Medical Image Analysis*; 2019.; 59.
- [2] Rocha, F., et al.; DeepBND: A machine learning approach to enhance multiscale solid mechanics; 2023.; 479.
- [3] Zlatić, M. i Čanađija, M.; Incompressible rubber thermoelasticity: a neural network approach; *Computational Mechanics*; 71.; 895-916.
- [4] Klein, D., et al.; Polyconvex anisotropic hyperelasticity with neural networks; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 159.
- [5] Linden, L., et al.; Neural networks meet hyperelasticity: A guide to enforcing physics; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 179.
- [6] Linka, K. i Kuhl, E.; A new family of Constitutive Artificial Neural Networks towards automated model discovery; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 403.
- [7] Thakolkaran, P., et al.; NN-EUCLID: Deep-learning hyperelasticity without stress data; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 169.



## Seizmička analiza povijesnih zidanih tornjeva

Živaljić, N.<sup>1</sup>, Balić, I.<sup>2</sup>, Smoljanović, H.<sup>3</sup>, Atir, M.<sup>4</sup>, Radovan Šoljić, A.<sup>5</sup> i Munjiza, A.<sup>6</sup>

### Sažetak

U ovom radu provedena je numerička analiza povijesnih zidanih tornjeva smještenih u Italiji. Analizirane konstrukcije razlikuju se po geometrijskim karakteristikama odnosno vitkosti, debljini vanjskih zidova, udjelu otvora, dok su im svojstva materijala slična.

Cilj ovog rada bila je analiza utjecaja različitih geometrija tornjeva te različitih svojstava tla na seizmičku otpornost zidanih konstrukcija. Geometrije tornjeva preuzete su iz dostupne literature. Analiza je provedena pomoću ravninskog numeričkog modela Y-2D koji se temelji na Metodi konačno-diskretnih elemenata (FDEM). Diskretizacija tornjeva provedena je na makro razini, uzimajući u obzir osrednjena svojstva morta i blokova. Konstrukcija je diskretizirana trokutnim konačnim elementima s tri čvora između kojih su implementirani kontaktni elementi koji omogućuju simulaciju nastanka i širenja pukotina.

Provedena je inkrementalna dinamička analiza do potpunog sloma konstrukcije. U svakom koraku praćena je pojava prvih pukotina, širenje pukotina, kao i način sloma konstrukcije.

Zaključci do kojih se došlo u ovom radu mogu poslužiti kao smjernica inženjerima pri ocjeni seizmičke otpornosti postojećih zidanih konstrukcija.

**Ključne riječi:** zidani tornjevi, seizmička otpornost, metoda konačno-diskretnih elemenata

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. **Nikolina Živaljić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: nikolina.zivaljic@gradst.hr

<sup>2</sup> izv. prof. dr. sc. **Ivan Balić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: ivan.balic@gradst.hr

<sup>3</sup> izv. prof. dr. sc. **Hrvoje Smoljanović**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: hrvoje.smoljanovic@gradst.hr

<sup>4</sup> **Marija Atir, mag. ing. aedif.**, e-mail: atirmarija@gmail.com

<sup>5</sup> **Radovan Šoljić, mag. ing. aedif.**, e-mail: anteradovan@gmail.com

<sup>6</sup> **prof. dr. sc. Ante Munjiza**, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: ante.munjiza@gradst.hr

## 1 Uvod

Kulturnu baštinu diljem Europe velikim dijelom čine povijesni zidani tornjevi. Tijekom povijesti građeni su u različite svrhe ali imaju zajedničko obilježje kao što je jednostavna geometrija tlocrta, relativno velika visina u odnosu na tlocrt, nepostojanje unutarnjih nosivih zidova i krutih horizontalnih konstruktivnih elemenata. Svi su većinom građeni od kamenih ili zidnih elemenata od opeke povezanih mortom.

S ciljem očuvanja kulturne baštine za buduće naraštaje, vrlo je važno predvidjeti ponašanje zidanih povijesnih konstrukcija izloženih različitim nepovoljnim utjecajima, od kojih je potres jedan od najnepovoljnijih. Razumijevanje konstruktivnog ponašanja takvih konstrukcija uslijed potresne pobude važno je za procjenu njihove potresne otpornosti, kao i za donošenje odluka vezanih uz njihovo buduće ojačanje i rekonstrukciju.

Za analizu zidanih konstrukcija do sada su razvijene mnoge numeričke metode koje se razlikuju po složenosti, stupnju točnosti, željenim rezultatima i količini ulaznih podataka. Jedna od numeričkih metoda koja obuhvaća prednosti metode konačnih i metode diskretnih elemenata je kombinirana Metoda konačno-diskretnih elemenata (FDEM) [1,2]. U ovom radu korišten je pristup makro modeliranja, odnosno svojstva bloka, morta i sučelja bloka i morta ravnomjerno su raspoređena po konstrukciji. Ovaj pristup daje nešto slabije rezultate pri promatranju lokalnih područja konstrukcije, ali uz točan odabir svojstava materijala može dati dobar uvid u globalno ponašanje konstrukcije i globalni uzorak pukotina. Budući da je računalno vrlo učinkovit, pogodan je za analizu realnih konstrukcija.

U ovom radu provedena je inkrementalna dinamička analiza za dva tornja smještena u Italiji [3], kako bi se istražio utjecaj geometrije tornjeva i deformabilnosti tla na seizmičku otpornost i mehanizam nastajanja i širenja pukotina te potpunog sloma tornjeva, s ravninskim modelom primjenom FDEM metode.

## 2 Numerički model za seizmičku analizu povijesnih zidanih tornjeva

Kombinirana metoda konačnih diskretnih elemenata učinkovit je alat za rješavanje širokog spektra fizikalnih problema koji uključuju veliki broj diskretnih elemenata koji se nalaze u međusobnoj interakciji [1]. U međusobnoj interakciji, kao rezultat nastanka i širenja pukotine, jedan diskretni element može se slomiti i fragmentirati u više zasebnih elemenata, koji se također mogu naći u interakciji s drugim diskretnim elementima. Unutar FDEM-a, svaki diskretni element je diskretiziran vlastitom mrežom konačnih elemenata koja omogućuje deformabilnost diskretnih elemenata. Masa diskretnih elemenata koncentrirana je u čvorovima svakog konačnog elementa što rezultira matricom masa. Temeljna jednadžba metode FDEM je:

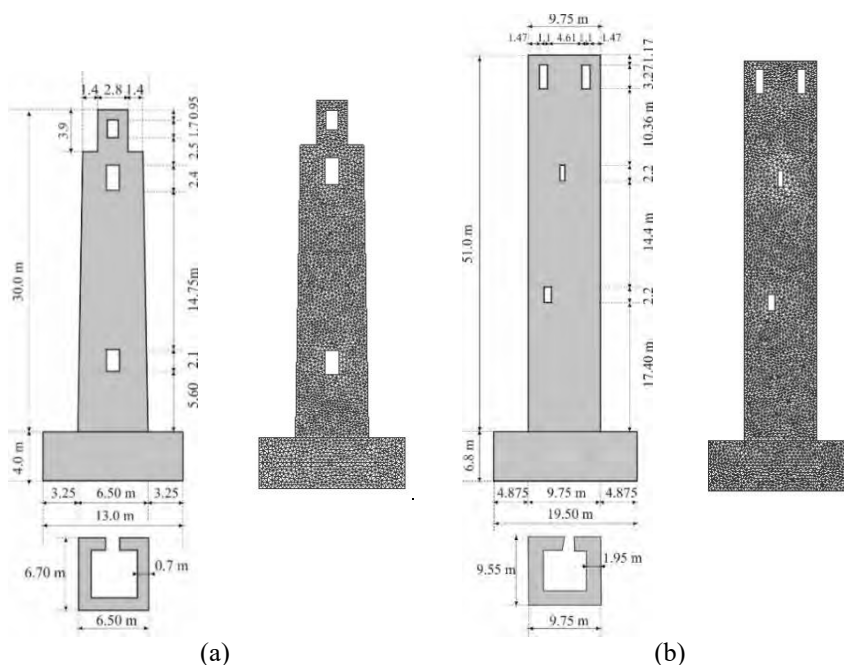
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{M}$  matrica mase,  $\mathbf{C}$  je matrica prigušenja,  $\mathbf{x}$  je vektor pomaka, dok je  $\mathbf{f}$  vektor ukupnih čvornih sila koji se sastoji od svih sila koje djeluju u sustavu, kao što su unutarnje sile koje proizlaze iz elastične deformacije konačnog elementa, vanjske volumenske, površinske i koncentrirane sile koje djeluju kao opterećenje, sile koje proizlaze iz kontaktne interakcije između diskretnih elemenata, sila prigušenja, sila trenja i kohezijske sile u pukotini [1].

Kako bi se izbjeglo rješavanje velikog sustava jednadžbi i osigurala numerička stabilnost, jednadžba (1) se rješava eksplicitno čvor po čvor, stupanj slobode po stupanj slobode korištenjem sheme vremenske integracije metodom konačnih razlika. Kako bi se uzeli u obzir svi gore navedeni procesi, nekoliko numeričkih algoritama, uključujući detekciju kontakta, kontaktnu interakciju, deformabilnost materijala, prijelaz iz kontinuuma u diskontinuum implementirano je kao dio FDEM metode. Detaljan opis FDEM metode je izvan opsega ovog rada i može se pronaći u sljedećoj literaturi [1].

## 2.1 Geometrijske i materijalne karakteristike modela

Geometrijske karakteristike tornjeva analiziranih u ovom radu prikazane na slici 1 [2]. Tornjevi su izgrađeni od malih glinenih opeka povezanih mortom koje karakterizira niska vlačna čvrstoća [2]. Iako su građene u različitim povijesnim razdobljima, od 12. do 18. stoljeća, metodologija gradnje i karakteristike materijala nisu se bitno mijenjale [3].



Slika 1. Geometrijske karakteristike i diskretizacija tornja: (a) A, (b) B

Numeričke analize provedene su programskim paketom Y-FDEM koji se temelji na FDEM metodi. Tornjevi su modelirani pojednostavljenim modelom u ravnini na makro razini. Mreža konačnih elemenata tornjeva korištena u numeričkoj analizi, prikazana na slici 1, sastojala se od 5038 i 6496 trokutastih konačnih elemenata s tri čvora za tornjeve A i B redom.

Kako bi se omogućila simulacija nastanka i širenja pukotina u numeričkim modelima zidanih tornjeva, između mreže trokutastih konačnih elemenata implementirani su kontakti elementi.

Ne postoje potpuni i točni podaci o svojstvima materijala, stoga su u analizama usvojene vrijednosti na temelju sličnosti primijenjene tehnike gradnje i arhitektonskih značajki. U provedenim numeričkim analizama preporučene vrijednosti preuzete su iz literature [3]. Svojstva materijala konstrukcijskih modela i tla korištenih u prikazanoj numeričkoj analizi zidanih tornjeva prikazana su u tablici 1. Gustoća materijala konstrukcije i tla je  $1800 \text{ kg/m}^3$ , a koeficijent trenja je 0.70.

Tablica 1. Usvojene karakteristike materijala za konstrukciju i tlo

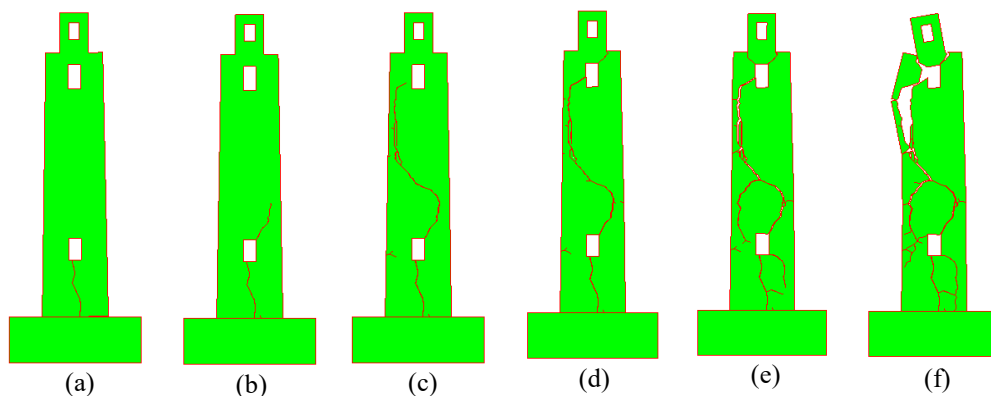
Materijalne karakteristike	Konstrukcija	Tlo
Modul elastičnosti, $E$ (MPa)	2250	70
Poisson-ov koeficijent ratio, $\nu$	0.30	0.20
Vlačna čvrstoća, $f_t$ (MPa)	0.27	-
Posmična čvrstoća	1.08	-
Energije loma u vlaku $G_{f,t}$ (N/m)	140	-
Energije loma u posmiku $G_{f,s}$ (N/m)	560	-

Za sve numeričke analize prikazane u ovom radu, kao pobuda korišteno je horizontalno i vertikalno ubrzanje tla potresa s epicentrom u Petrovcu, Crna Gora, zabilježen 15. travnja 1979.

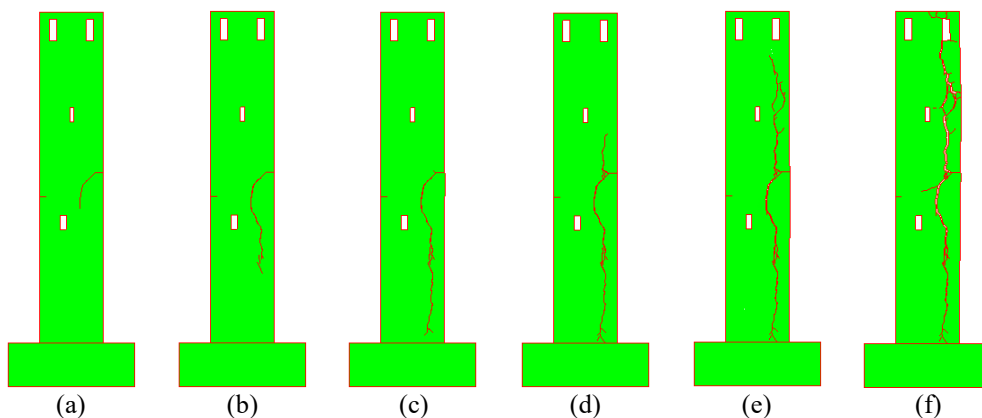
### 3 Rezultati numeričkih analiza

U ovom radu provedena je inkrementalna dinamička analiza slobodno oslonjenih zidanih tornjeva na elastičnu i krutu podlogu. Cilj numeričke analize bio je utvrditi utjecaj uvjeta oslanjanja tornja na nosivost zidanih konstrukcija tornjeva, nastanak i širenje pukotina, te konačni oblik potpunog sloma konstrukcije.

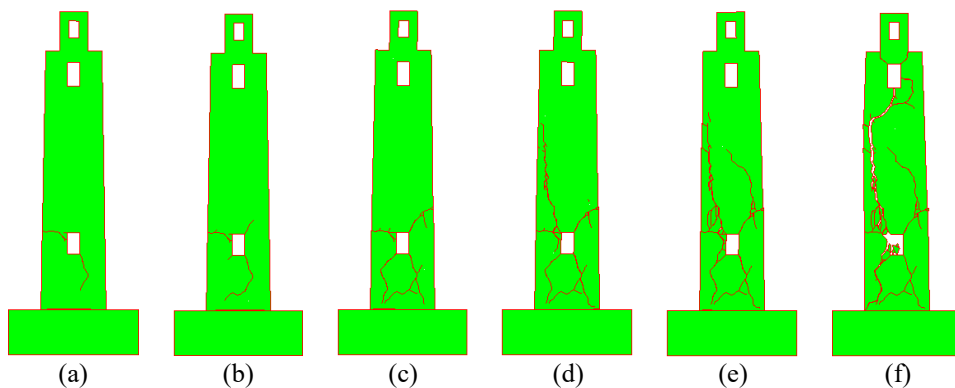
Na slikama 2 i 3 prikazane su pukotine tornjeva oslonjenih na elastičnu podlogu, dok slike 4 i 5 prikazuju način nastajanja i širenja pukotina za tornjeve oslonjene na krutu podlogu.



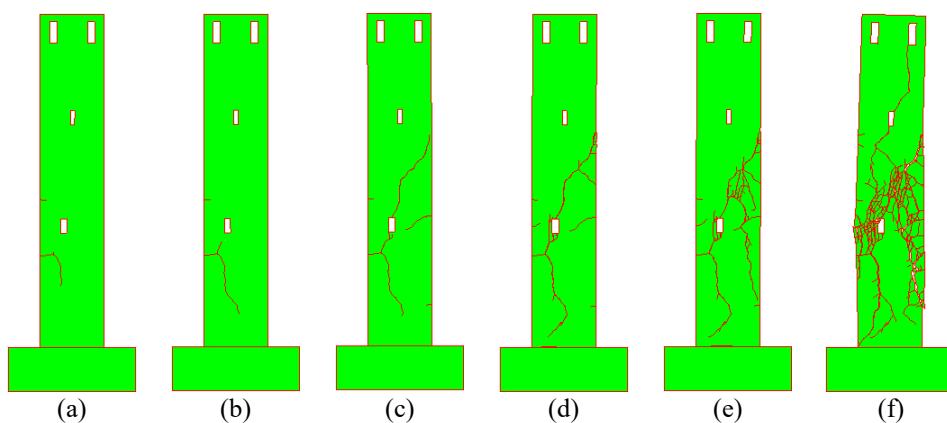
Slika 2. Nastanak i širenje pukotina za toranj A na elastičnoj podlozi za ubrzanje ( $a_{g,max}=0.52g$ ) u vremenu: (a)  $t=8.2s$ ; (b)  $t=8.5s$ ; (c)  $t=9.0s$ ; (d)  $t=9.5s$ ; (e)  $t=11.0s$ ; (f)  $t=14.5s$ .



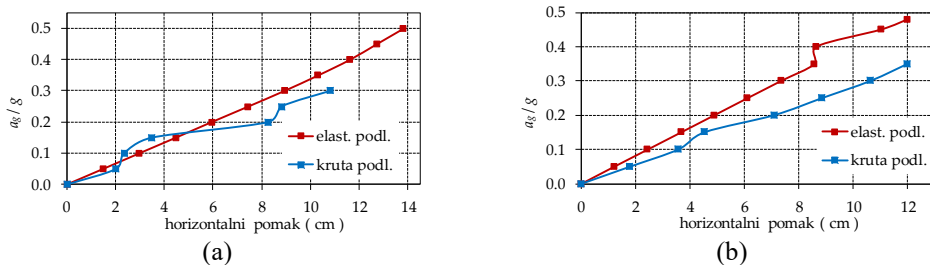
Slika 3. Nastanak i širenje pukotina za toranj B na elastičnoj podlozi za ubrzanje ( $a_{g,max}=0.49g$ ) u vremenu (a)  $t=9.0s$ ; (b)  $t=13.3s$ ; (c)  $t=14.0s$ ; (d)  $t=15.0s$ ; (e)  $t=15.8s$ ; (f)  $t=16.4s$ .



Slika 4. Nastanak i širenje pukotina za toranj A na krutoj podlozi za ubrzanje ( $a_{g,max}=0.35g$ ) u vremenu (a)  $t=7.1s$ ; (b)  $t=7.5s$ ; (c)  $t=8.5s$ ; (d)  $t=9.0s$ ; (e)  $t=9.8s$ ; (f)  $t=12.0s$



Slika 5. Nastanak i širenje pukotina za toranj B na krutoj podlozi za ubrzanje ( $a_{g,max}=0.42g$ ) u vremenu (a)  $t=9.0s$ ; (b)  $t=11.3s$ ; (c)  $t=11.6s$ ; (d)  $t=12.0s$ ; (e)  $t=12.5s$ ; (f)  $t=13.2s$



Slika 6. Pomaci za različita vršna ubrzanja na krutoj i elastičnoj podlozi za toranj: (a) A; (b) B

Usporedba pomaka za različita vršna ubrzanja tla na krutim i elastičnim podlogama prikazana je na slici 6.

## 4 Zaključci

Provedena je inkrementalna dinamička analiza na dva zidana tornja s ciljem analize utjecaja geometrijskih karakteristika konstrukcije te krutosti temeljnog tla na globalno ponašanje, mehanizam sloma i seizmičku otpornost konstrukcije izložene seizmičkom opterećenju. Na temelju provedenih analiza može se uočiti da je mehanizam urušavanja analiziranih tornjeva uzrokovan razvojem pukotina oko otvora, koje se šire okomito po visini tornja tijekom seizmičke pobude, što u konačnici uzrokuje odvajanje dijelova konstrukcije.

Tornjevi na elastičnoj podlozi pokazuju približno 40% veću seizmičku otpornost u usporedbi sa tornjevima na potpuno krutom tlu. Zidani tornjevi se na elastičnijoj podlozi ponašaju duktilnije i u konačnici pokazuju prosječno 10% veći pomak u usporedbi s tornjevima na krutoj bazi. Numeričke analize su pokazale da seizmička otpornost opada s povećanjem vitkosti tornjeva, a raste s povećanjem posmične otpornosti baze, ali ne značajno.

## Zahvale

Prikazana istraživanja su podržana projektom KK.01.1.1.02.0027-projekt sufinanciran iz Državnog proračuna Republike Hrvatske i od strane Europske unije iz Europskog fonda za regionalni razvoj unutar Operativnog programa "Konkurentnost i kohezija".

## Literatura

- [1] Munjiza, A. The combined finite-discrete element method; UK; John Wiley & Sons; 2004.
- [2] Casolo, S., Milani, G., Uva, G., and Alessandri, C.; Comparative seismic vulnerability analysis on ten masonry towers in the coastal Po Valley in Italy; Engineering Structures; 2013; 49; 465–490.
- [3] Clementi, F., Quagliarini, E., Monni, F., Giordano, E. and Lenci, S.; Cultural Heritage and Earthquake: The Case Study of "Santa Maria Della Carità" in Ascoli Piceno; The Open Civil Engineering Journal; 2017; 11; 1079-1105.

## Indeks autora

### A

Alfano, G.	165
Atir, M.	201

### B

Balić, I.	201
Bonačić, F.	127
Bonković, K.	115
Braut, S.	145
Brčić, M.	1
Brnić, J.	1

### C

Cvitanić, V.	9
--------------	---

### Č

Čanađija, M.	15, 145, 195
Čarija, J.	19
Čorić, I.	9

### Ć

Ćurković, M.	137
--------------	-----

### D

Damjanović, D.	153
Divić, V.	25
Draganić, H.	31

### F

Friedman, N.	111
--------------	-----

### G

Galešić Divić, M.	25
Galić, M.	25
Gazić, G.	31
Gotovac, B.	67
Grbac, L.	35
Grbac, M.	39
Grozdanić G.	25

### H

Hlača, I.	43
Hoić, M.	49, 99

### J

Jalušić, B.	189
Jarak, T.	19
Jeleč, M.	31
Jelenić, G.	35
Jurčević, M.	115
Jurković, D.	55

### K

Kačmarčik, J.	61
Katinić, M.	61
Konjatić, P.	61
Košmerl, V.	15
Kozak, D.	153
Kozulić, V.	67
Kustura, D.	73

### L

Lesičar, T.	79, 121, 159, 189
Lozina, Ž.	85, 87
Lukić, S.	31

### M

Madunić, A.	25
Marenić, E.	19
Marinić-Kragić, I.	91
Matić, T.	73
Matthies, H.G.	111
Milas, Z.	91
Miler, D.	49, 99
Mudrić, T.	183
Munjiza, A.	201

### N

Nikolić, M.	19, 111, 171
Nikolić, Ž.	105

### P

Pehnec, I.	115
Polančec, T.	121
Pustaić, D.	127

**R**

Radić, I.	31
Radovan Šoljić, A.	201
Ribarić, D.	39, 43, 55
Runjić, L.	105

**S**

Samardžić, D.	137
Sedlar, D.	85, 87, 143
Skoblar, A.	145
Skozrit, I.	175, 189
Smoljanović, H.	201
Stanic, A.	111, 171

**Š**

Šarac, J.	85
Šarlija, L.	153, 159
Škec, L.	165
Šodan, M.	111, 171
Štimac Rončević, G.	145

**T**

Tomorad, J.	175
Tonković, Z.	189
Tutić, K.	183

**V**

Vlak, F.	73
Vrtovšnik, D.	1
Vučina, D.	91
Vučković, M.	25
Vukasović, M.	73
Vukovojac, M.	189

**Z**

Zlatic, M.	15, 195
------------	---------

**Ž**

Žigulić, R.	145
Živaljić, N.	201



## SPONZORI



Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje



Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije



X-Sight s.r.o, Brno, Republika Češka